

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con la misura di Lebesgue, $H = L^2(\mathbb{T})$

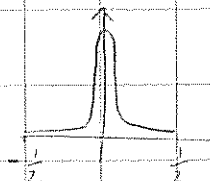
$\{e^{2\pi i m x}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ è una famiglia ortonormale

Teorema $\{e^{2\pi i m x}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ è una base Hilbertiana di $L^2(\mathbb{T})$

Sia $0 < \pi < 1$ e $p_\pi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $p_\pi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi^{|k|} e^{2\pi i k x}$

Dato x con $0 < x < 1$, la serie converge uniformemente.

$$\begin{aligned} p_\pi(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\pi e^{2\pi i k x} + (\pi e^{-2\pi i k x})^k) = \\ &= 1 + \frac{\pi e^{2\pi i x}}{1 - \pi e^{2\pi i x}} + \frac{\pi e^{-2\pi i x}}{1 - \pi e^{-2\pi i x}} = 1 + \frac{\pi e^{2\pi i x} - \pi^2 + \pi e^{-2\pi i x} - \pi^2}{1 + \pi^2 - \pi e^{2\pi i x} - \pi e^{-2\pi i x}} \\ &= 1 + \frac{2\pi \cos(2\pi x) - 2\pi^2}{1 - 2\pi \cos(2\pi x) + \pi^2} = \frac{1 - \pi^2}{1 - 2\pi \cos(2\pi x) + \pi^2} \end{aligned}$$



$\Rightarrow p_\pi$ è reale e positiva, $p_\pi \rightarrow 0$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{T} \setminus \{0\}$

$$\int_{\mathbb{T}} p_\pi(x) dx = \int_{\mathbb{T}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi^{|k|} e^{2\pi i k x} dx \stackrel{\text{conv. unif.}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} \pi^{|k|} e^{2\pi i k x} dx = 1$$

Dato $u \in L^2(\mathbb{T})$, $\hat{u}(k) = (u, e^{2\pi i k x}) = \int_{\mathbb{T}} u(x) e^{-2\pi i k x} dx$
coefficienti di Fourier k -esimo di u

Obs $\hat{u}(k)$ è ben definito anche se $u \in L^1(\mathbb{T})$

L'applicazione $u \mapsto (\hat{u}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ manda $L^1(\mathbb{T})$

in $\ell^\infty(\mathbb{Z})$

Donc $u \in L^1(\mathbb{T})$, définissons $J_n u$ par

$$J_n u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau^{1k1} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x}$$

$$\begin{aligned} J_n u(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau^{1k1} \left(\int_{\mathbb{T}} u(y) e^{-2\pi i k y} dy \right) e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} \tau^{1k1} u(y) e^{2\pi i k (x-y)} dy \end{aligned}$$

Pour échanger la somme et l'intégrale de la somme finie, on utilise le théorème de Lebesgue, car la somme est uniformément dominée par une fonction L^1 .

$$\left| \sum_{|k| \leq n} \tau^{1k1} u(y) e^{2\pi i k (x-y)} \right| \leq \sum_{|k| \leq n} \tau^{1k1} |u(y)| \leq \frac{2}{1-\tau} |u(y)| \in L^1$$

$$\begin{aligned} J_n u(x) &= \int_{\mathbb{T}} u(y) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau^{1k1} e^{2\pi i k (x-y)} dy = \\ &= \int_{\mathbb{T}} u(y) p_n(x-y) dy =: u * p_n(x) \end{aligned}$$

Lemme Soit $u \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < +\infty$. Alors

$$J_n u \rightarrow u \text{ in } L^p.$$

dim

$$\begin{aligned} |J_n u(x) - u(x)| &= |u * p_n(x) - u(x)| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}} (u(x-y) - u(x)) p_n(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |u(x-y) - u(x)| p_n(y) dy \end{aligned}$$

Lemme : $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ avec $\mu(X) = 1$, $f \in L^1(\mu)$

$$\Rightarrow \varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu \quad \text{Quand : } \mu = p_n(y) dy$$

$$|J_n u(x) - u(x)|^p \leq \int_{\mathbb{T}} |u(x-y) - u(x)|^p p_n(y) dy$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Alors, $\exists n_0 < 1$ t.c. si $n \geq n_0$

si ha $0 < p_n(y) \leq \varepsilon$ se $y \in \mathbb{T} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$. Quindi

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_n u(x) - u(x)|^p &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u(x-y) - u(x)|^p p_n(y) dy + \int_{\mathbb{T} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \dots \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u(x-y) - u(x)|^p p_n(y) dy + \varepsilon \int_{\mathbb{T}} |u(x-y) - u(x)|^p dy \end{aligned}$$

Integrando per $x \in \mathbb{T}$:

$$\|\mathcal{T}_n u - u\|_p^p \leq \int_{\mathbb{T}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u(x-y) - u(x)|^p p_n(y) dy dx + \quad (1)$$

$$+ \varepsilon \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |u(x-y) - u(x)|^p dy \right) dx$$

Fubini
Tonelli

$$\begin{aligned} (2) &= \varepsilon \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |u(x-y) - u(x)|^p dx \right) dy = \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{T}} \|\mathcal{T}_y u - u\|_p^p dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{T}} (\|\mathcal{T}_y u\|_p + \|u\|_p)^p dy \\ &= 2^p \varepsilon \|u\|_p^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &\stackrel{\text{Fubini Tonelli}}{=} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{T}} |u(x-y) - u(x)|^p dx \right) p_n(y) dy = \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|\mathcal{T}_y u - u\|_p^p p_n(y) dy \leq \sup_{|y| \leq \varepsilon} \|\mathcal{T}_y u - u\|_p^p \end{aligned}$$

che tende a 0 per $\varepsilon \rightarrow 0$ per la continuit  della
traslazioni in L^p . □

Oss $\mathcal{T}_y u(x) = u(x-y)$

$$u \in C_0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \text{ unif. cont.} \Rightarrow \sup_{|y| \leq \delta} \|\mathcal{T}_y u - u\|_{\infty} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

$$u \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad 1 \leq p < +\infty \Rightarrow \sup_{|y| \leq \delta} \|\mathcal{T}_y u - u\|_p \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

dim (del Teorema)

Sia $u \in L^2(\mathbb{T})$. Per la disuguaglianza di Bessel,
 $(\hat{u}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$. Allora

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x} \right\|_2^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} (r^k - 1) \hat{u}(k) e^{2\pi i k x} \right\|_2^2$$

Pitagora
gen.

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |r^k - 1|^2 |\hat{u}(k)|^2 \xrightarrow{\text{per } r \rightarrow 1} 0 \quad \text{per convergenza dominata}$$

Ma per il Lemma, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x} \xrightarrow{L^2} u$, quindi per l'unicità
del limite

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x}$$

e la Terza parte della caratterizzazione (iv) delle
base Hilbertiane. $\square$

Es * Dimostrare che se $u \in C^0(\mathbb{T})$ allora

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x} \rightarrow u$ uniformemente per $r \rightarrow 1$.

Dedurre che lo spazio dei polinomi trigonometrici è
denso in $C^0(\mathbb{T})$.

Attenzione Ciò non implica che se $u \in C^0(\mathbb{T})$ la
serie di Fourier converge ad u uniformemente (la
convergenza è solo L^2).

Es Dimostrare che la famiglia di funzioni

$$\mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto e^{2\pi i k \cdot x}, \quad k \in \mathbb{Z}^m$$

è una base Hilbertiana di $L^2(\mathbb{T}^m)$ [ricapitolare

per u con $P_n(u_1, \dots, u_m) = \prod_{j=1}^{n_j} p_n(u_j)$]

Basi Hilbertiane utili di $L^2(0, T)$

1) $\left\{ \frac{1}{T} e^{\frac{2\pi i k x}{T}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ non troppo buone per funzioni regolari
non T -periodiche

2) Si prenda $u \in L^2(0, T)$ ed una funzione pari su $(-T, T)$ e successivamente ad una funzione $2T$ -periodica.

Essendo $2T$ -periodica, ha uno sviluppo di Fourier

rispetto a $\left\{ \frac{1}{2T} e^{\frac{\pi i k x}{T}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$u \text{ pari} \Rightarrow \hat{u}(k) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(x) e^{-\frac{\pi i k x}{T}} dx =$$

$$= \frac{1}{2T} \int_0^T u(x) e^{-\frac{\pi i k x}{T}} dx + \frac{1}{2T} \int_{-T}^0 u(-x) e^{-\frac{\pi i k x}{T}} dx$$

$$= \frac{1}{2T} \int_0^T u(x) \left(e^{-\frac{\pi i k x}{T}} + e^{+\frac{\pi i k x}{T}} \right) dx = \frac{1}{T} \int_0^T u(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{T}\right) dx$$

Es

$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{T} \cos \frac{\pi k x}{T} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una base Hilbertiana per $L^2(0, T)$.

Ex * Applicare l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

alle successioni $\{x^m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset L^2(0, 1)$ e costruire

una famiglia ortogonale di polinomi in $L^2(0, 1)$.

Serie di Fourier di funzioni regolari

Sia $u \in C^\infty(\mathbb{T})$. Allora

$$\begin{aligned} \hat{u}'(k) &= \int u'(x) e^{-2\pi i k x} dx = - \int u(x) (-2\pi i k) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= 2\pi i k \hat{u}(k) \end{aligned}$$

$$\text{In generale } \widehat{u^{(m)}}(k) = (2\pi i k)^m \hat{u}(k)$$

Quindi l'identità di Parseval implica

$$\|u^{(m)}\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi|k|)^{2m} |\hat{u}(k)|^2$$

In particolare, $\forall m > 0 \quad |k|^{2m} |\hat{u}(k)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Lo spazio delle $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ t.c. $|k|^{2m} a(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall m > 0$ si indica con $S(\mathbb{Z})$.

Perciò l'isomorfismo di spazi di Hilbert

$$L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad u \mapsto (\hat{u}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

si restringe ad un'applicazione lineare

$$\Phi: C^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow S(\mathbb{Z})$$

Se $a \in S(\mathbb{Z})$, la funzione

$$u(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) e^{2\pi i k x}$$

è ben definita ed è C^∞ . Quindi l'isomorfismo inverso

$$\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}), \quad a \mapsto \sum_k a(k) e^{2\pi i k x}$$

si restringe ad un'applicazione lineare

$$\Psi: S(\mathbb{Z}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T})$$

Teorema (Formule di inversione) Φ e Ψ sono bigettive e sono una l'inversa dell'altra.

dim

$$\Phi \circ \Psi = I_{S(\mathbb{Z})} \quad \text{sia } a \in S(\mathbb{Z}) \text{ e}$$

$$u(x) = \Psi a(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) e^{2\pi i k x}$$

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} a(h) e^{2\pi i (h-k)x} dx \stackrel{\text{con dom.}}{=} \sum_{h \in \mathbb{Z}} a(h) \delta_{h,k} = a(k)$$

$$\Rightarrow \Phi \Psi a = a$$

Δ

• $\psi \circ \Phi = \text{Id}_{C^0(\mathbb{T})}$. Sia $u \in C^\infty(\mathbb{T})$ e $a = \Phi u$

In particolare, $u \in L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow$

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) e^{2\pi i k x} = \psi \Phi u \quad \square$$

• Se $a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) e^{2\pi i k x}$ converge uniformemente da una $u \in C^0(\mathbb{T})$. Dunque

$$\psi : \ell^1(\mathbb{Z}) \rightarrow C^0(\mathbb{T})$$

Non è vero però che $\widehat{u}$ ^{rec. dei} coefficienti di Fourier di una $u \in C^0(\mathbb{T})$ sta in ℓ^1 .

• Se $u \in C^1(\mathbb{T}) \Rightarrow u' \in C^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \widehat{u'} \in \ell^2$, allora

$$|\widehat{u'}(k)|^2 = 4\pi^2 k^2 |\widehat{u}(k)|^2 \text{ è sommabile}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}(k)| &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| |\widehat{u}(k)| \frac{1}{|k|} < \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^2 |\widehat{u}(k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|k|^2} \right)^{1/2} < +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \widehat{u} \in \ell^1 \Rightarrow$ La serie di Fourier di u converge uniformemente a u .

Es $u \in C^l(\mathbb{T}^m)$ con $l > \frac{m}{2} \Rightarrow$ La serie di Fourier di u converge uniformemente a u .