

$$\text{Se } u = \sum_{j \in J} u_j$$

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= (u, u) = \left(\sum_{j \in J} u_j, u \right) = \sum_{j \in J} (u_j, u) = \\ &= \sum_{j \in J} (u_j, \sum_{h \in J} u_h) = \sum_{j \in J} \sum_{h \in J} (u_j, u_h) = \sum_{j \in J} \|u_j\|^2 \end{aligned}$$

□

Basi Hilbertiane

Una basi Hilbertiana di H è una famiglia ortogonale
 massimale rispetto all'inclusione (non per unioni compl.)
 L'esistenza di basi Hilbertiane è garantita dal
 Lemma di Zorn.

Teorema Sia $\{u_j\}_{j \in J}$ una famiglia ortogonale.

Sono fatti equivalenti:

- (i) $\{u_j\}_{j \in J}$ è una base Hilbertiana
- (ii) $u \in H$ e $u \perp u_j \quad \forall j \in J \Rightarrow u = 0$
- (iii) $\overline{\text{Span}} \{u_j\}_{j \in J} = H$
- (iv) $u \in H \Rightarrow u = \sum_{j \in J} (u, u_j) u_j$ (sviluppo di Fourier)
- (v) $u, v \in H \Rightarrow (u, v) = \sum_{j \in J} (u, u_j) (u_j, v)$ (identità di Parseval)
- (vi) $u \in H \Rightarrow \|u\|^2 = \sum_{j \in J} |(u, u_j)|^2$ (in Bessel vale " $\leq$ ")

dim (i) $\Rightarrow$ (ii) ovvio.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se $\overline{\text{Span}} \{u_j\}_{j \in J} \neq H$ esiste $u \neq 0$

$u \perp \overline{\text{Span}} \{u_j\}_{j \in J}$, in particolare $u \perp u_j \quad \forall j \in J$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sia $u \in H$.

Per Bessel $\sum_{j \in J} |(u, u_j)|^2 \leq \|u\|^2$. Per Pitagora generalizzata,

$\sum_{j \in J} (u, u_j) u_j$ è sommabile ed ha somma v .

$$(u - v, u_h) = (u, u_h) - \left(\sum_{j \in J} (u, u_j) u_j, u_h \right) = 0$$

$\Rightarrow u - v \perp \text{Span}\{u_j\} \Rightarrow$ (il prod scalare è continuo) $u - v \perp \overline{\text{Span}\{u_j\}} \stackrel{(iii)}{=} H \Rightarrow u = v$

(iv) $\Rightarrow$ (v)

$$(u, v) = \left(\sum_{j \in J} (u, u_j) u_j, \sum_{h \in J} (v, u_h) u_h \right) =$$

$$= \sum_{j \in J} (u, u_j) \left(u_j, \sum_{h \in J} (v, u_h) u_h \right) =$$

$$= \sum_{j \in J} (u, u_j) \overline{(v, u_j)} = \sum_{j \in J} (u, u_j) (u_j, v)$$

(v) $\Rightarrow$ (vi) ovvio

(vi) $\Rightarrow$ (i) Se $\exists u \neq 0, \forall j \in J, (u, u_j) = 0$ e u ortogonale a $\{u_j\}$, $\|u\|^2 \stackrel{(iii)}{=} \sum_j |(u, u_j)|^2 = 0$ □

Es $H = \ell^2 = \{u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_m |u(m)|^2 < +\infty\}$

$e_j \in \ell^2 \quad e_j(m) = \delta_{jm}$

$\{e_j\}$ è ortogonale. È una base, ad esempio per (vi)

Più in generale, X insieme

$$\ell^2(X) = \{u: X \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in X} |u(x)|^2 < +\infty\}$$

con $(u, v) = \sum_{x \in X} u(x) \overline{v(x)}$

$$\ell^2(X) = L^2(X, \mathcal{P}(X), \mu)$$

part: di X

misura di conteo

$$\mu(A) = \#A$$

$\{e_x\}_{x \in X} \quad e_x(y) = \delta_{xy}$

Corollario Se $\{u_j\}_{j \in J}$ è una base Hilbertiana di H , allora l'applicazione

$$T: H \rightarrow \ell^2(J), \quad u \mapsto (\hat{u}_j) = (u, u_j)_{j \in J}$$

è un'isometria biettiva di spazi di Hilbert.

[$T: H_1 \rightarrow H_2$ isometria $\Rightarrow$ è lineare e $(Tu, Tv)_2 = (u, v)_1 \quad \forall u, v \in H_1$. Equiv. $\|Tu\|_2 = \|u\|_1, \forall u \in H_1$.

Le isometrie sono iniettive ed hanno immagine chiusa, ma in generale non sono surgettive]

dim E' un'isometria per la caratterizzazione (vi) (o (v)).

Se $a \in \ell^2(J)$ Allora $u = \sum_{j \in J} a_j u_j$ è sommabile per Pitagora generalizzato e $Tu = a$. $\square$

Teorema Due basi Hilbertiane dello stesso spazio H hanno la stessa cardinalità.

dim

Se $I \neq J$ è finito, ok per algebre l.i.

Se $I \in I$

Basi $\{u_i\}_{i \in I}, \{v_j\}_{j \in J}$. $\forall$ Dato che $u_i = \sum_j (u_i, v_j) v_j$,

l'insieme $K_i = \{j \in J \mid (u_i, v_j) \neq 0\} \in \aleph_0$.

Se $j \in J$, $\exists i$ t.c. $(u_i, v_j) \neq 0$ (altrimenti v_j sarebbe ortogonale a tutti gli u_i). $\Rightarrow J = \bigcup_{i \in I} K_i$

$\Rightarrow J \leq \aleph_0 \cdot I = I$ (poiché I è infinito).

Simmetricamente, $I \leq J$. $\square$

Prop H è separabile $\Leftrightarrow$ le sue basi hilbertiane sono
o $\emptyset$ più numerabili

dim

$\Leftrightarrow \{u_j\}$ base hilbertiana numerabile

$E = \text{Span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \{u_j\}$ è numerabile e dalla
proprietà (iv) delle basi E è denso.

$\Rightarrow \{u_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ base hilbertiana $\Rightarrow B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u_j)$ sono
2 a 2 disgiunte: $\forall i \neq j \text{ e } u \in H \text{ t.c.}$

$$\|u - u_i\| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \|u - u_j\| < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$2 = \|u_i - u_j\|^2 \leq (\|u_i - u\| + \|u - u_j\|)^2 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$$

Se H è separabile $\Rightarrow J$ è al più numerabile $\square$