19.5.2010

Operatore aggiunto

H spazio di Hilbert, $T \in L(H)$

Defn T^*, o aggiunto di T, è definito da

$$(Tu, v) = (u, T^*v) \qquad \forall u, v \in H$$

Più precisamente, fissato $v \in H$, il funzionale $u \mapsto (Tu, v)$ è lineare e continuo, quindi per il teorema di Riesz $\exists! \, w \in H$ tale che $(Tu, v) = (u, w)$ $\forall u \in H$ e si pone $T^*v := w$.

- T^* è lineare
- $$\|T^*\| = \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{\|T^*u\|}{\|u\|} = \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{(T^*u, T^*u)}{\|u\| \, \|T^*u\|} = \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{(TT^*u, u)}{\|u\| \, \|T^*u\|}$$
  $$\leq \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{\|T\| \, \|T^*u\| \, \|u\|}{\|u\| \, \|T^*u\|} \leq \|T\|$$ quindi T^* è continuo
- $T^{**} = T \implies \|T^*\| = \|T\|$.
- L'applicazione $T \mapsto T^*$ è $\mathbb{C}$-anti-lineare su $L(H)$ ($L(H)$ è una C^*-algebra)

Esempio: L'aggiunto dello shift surgettivo $S \in L(\ell^2)$ è definito da $(S^*u, v) = (u, Sv)$ ossia

$$\sum_{m \geq 0} (S^*u)(m) \overline{v(m)} = \sum_{m \geq 0} u(m) \overline{v(m+1)}$$

Se $v = e_0$, otteniamo $(S^*u)(0) = 0$

Se $v = e_k$, $k \geq 1$, otteniamo $(S^*u)(k) = u(k-1)$

Quindi S^* è lo shift iniettivo D

Anche su $\ell^2(\mathbb{Z})$ gli shift destro e sinistro (entrambi invertibili) sono uno l'inverso dell'altro.

- $(TS)^* = S^* T^*$

Esempio $(X, \mathcal{F}, \mu)$ spazio di misura, $K \in L^2(X \times X)$

$T_K : L^2(X) \to L^2(X)$, $(T_K u)(x) = \int_X K(x,y) u(y) \, d\mu(y)$.

La buona definizione e la continuità di T_K seguono da:

$$\|T_K u\|_2^2 = \int_X \left| \int_X K(x,y) u(y) \, d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \leq \int_X \left(\int_X |K(x,y)|^2 d\mu(y) \right) \|u\|_2^2 \, d\mu(x)$$

$$= \|u\|_2^2 \int_{X \times X} |K(x,y)|^2 \, d\mu \times d\mu \qquad (*)$$

Determiniamo l'aggiunto di T_K:

$$(T_K^* u, v) = (u, T_K v) = \int_X u(x) \overline{\int_X K(x,y) v(y) \, d\mu(y)} \, d\mu(x)$$

$$= \int_{X \times X} u(x) \overline{K(x,y)} \, \overline{v(y)} \, d\mu \times \mu = \int_X \overline{v(y)} \int_X \overline{K(x,y)} u(x) \, d\mu(x) \, d\mu(y)$$

$$= (T_{\tilde{K}} u, v) \qquad \text{dove} \quad \tilde{K}(x,y) = \overline{K(y,x)}.$$

- T_K è compatto: usiamo il fatto che $K \in L^2(X \times X)$ allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ R(x,y) = \sum_{j=1}^N f_j(x) g_j(y)$ con $f_j, g_j \in L^2(X)$ tale che $\|K - R\|_2 < \varepsilon$.
  Da $(*)$ segue che $\|T_K - T_R\| \leq \|K - R\|_2 < \varepsilon$. Però $(T_R u)(x) = \sum_{j=1}^N \left(\int_X g_j(y) u(y) \, d\mu \right) f_j(x)$, quindi $T_R L^2 \subseteq \operatorname{Span}\{f_j\}_{j=1}^N$ e T_K è limite di operatori di rango finito.

- $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ e $\overline{\operatorname{Im} T^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$
  Se $u \in \operatorname{Ker} T^*$ e $v \in H \Rightarrow (u, Tv) = (T^* u, v) = 0 \Rightarrow u \in (\operatorname{Im} T)^\perp$
  Se $u \in (\operatorname{Im} T)^\perp$ e $v \in H \Rightarrow (T^* u, v) = (u, Tv) = 0 \Rightarrow u \in \operatorname{Ker} T^*$
  Quindi $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$. Applicando questa identità a T^*, $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$ e prendendo gli ortogonali
  $(\operatorname{Ker} T)^\perp = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} T^*}$. $\triangle$

- T ha rango finito $\Rightarrow$ T^* ha rango finito.
  Infatti: $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \operatorname{Ker} T$ che ha codimensione finita poiché $\frac{H}{\operatorname{Ker} T} \simeq \operatorname{Im} T$.

Prop $T \in \mathcal{L}_c(H) \Rightarrow T^* \in \mathcal{L}_c(H)$

dim

$T \in \mathcal{L}_c(H) \Rightarrow T$ è limite di operatori di rango finito R_n
$\Rightarrow T^*$ è limite di op. di rango finito $R_n^* \Rightarrow T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ □

Operatori autoaggiunti

Defn $T \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto se $T^* = T$.

- T autoaggiunto $\Rightarrow (Tu, u) \in \mathbb{R} \quad \forall u \in H$
- Gli autovalori di un operatore autoaggiunto sono reali:
  $Tu = \lambda u$ con $u \neq 0 \Rightarrow \lambda \|u\|^2 = (\lambda u, u) = (Tu, u) = (u, Tu) = (u, \lambda u) = \bar{\lambda} \|u\|^2$
  $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.
- Lo spettro di un operatore autoaggiunto è reale:
  Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Per quanto visto sopra, $\lambda I - T$ è iniettivo.
  $\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - T)} = (\operatorname{Ker}(\lambda I - T)^*)^\perp = (\operatorname{Ker}(\bar{\lambda} I - T))^\perp = (0)^\perp = H$.
  Quindi $\lambda I - T$ ha immagine densa. Per concludere basta mostrare che l'inverso $(\lambda I - T)^{-1} : \operatorname{Im}(\lambda I - T) \to H$ è limitato.
  Posto $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$, si ha:
  $\|(\lambda I - T) u\|^2 = ((a - T)u + ibu, (a - T)u + ibu) =$
  $= \|(a - T)u\|^2 + b^2 \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re}(ibu, (a - T)u)$
  Ma $\operatorname{Re}(ibu, (a - T)u) = \operatorname{Im}(bu, (a - T)u) = 0$ perché $b(a - T)$ è autoaggiunto. Perciò

  $$\|(\lambda I - T)u\| \geq |b| \, \|u\|$$

  e dunque $(\lambda I - T)^{-1}$ è limitato. △

- T autoaggiunto $\Rightarrow \|T\| = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} |(Tu,u)| = \rho(T)$

$|(Tu,u)| \leq \|Tu\|\|u\| \leq \|T\|\|u\|^2$ da cui

$c := \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} |(Tu,u)| \leq \|T\|$

Se $u, v \in H$, $(T(u+v), u+v) - (T(u-v), u-v) = 4\,\mathrm{Re}(Tu,v)$

$\Rightarrow 4\,\mathrm{Re}(Tu,v) \leq c\|u+v\|^2 + c\|u-v\|^2 = 2c(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Supponiamo $Tu \neq 0$ e poniamo $v := \frac{\|u\|}{\|Tu\|} Tu$. Allora

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\mathrm{Re}(Tu,v) = 2\|u\|\|Tu\| \\ \quad\wedge\!| \\ c(\|u\|^2 + \|v\|^2) = 2c\|u\|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \|Tu\| \leq c\|u\| \Rightarrow \|T\| \leq c$$

Questo mostra la prima uguaglianza

Dato che anche T^2 è autoaggiunto:

$$\|T^2\| = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} |(T^2u,u)| = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \|Tu\|^2 = \|T\|^2$$

Per induzione, $\|T^{2^m}\| = \|T\|^{2^m}$ e dalla formula del raggio spettrale:

$$\rho(t) = \lim_{m \to \infty} \|T^{2^m}\|^{2^{-m}} = \|T\| \qquad \Delta$$

- T autoaggiunto. Se $\|u\|=1$ è tale che $(Tu,u) = \pm\|T\|$, allora $Tu = \pm\|T\|u$, ossia $\pm\|T\|$ è un autovalore e u è il relativo autovettore

Sia $v \perp u$, $\|v\| = 1$. Allora $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\underset{\|}{(T(u+tv), u+tv)} \leq c\|u+tv\|^2 = c(1+t^2) \text{ e vale = per } t=0$$

$$(Tu,u) + t(Tv,u) + t(Tu,v) + t^2(Tv,v) = c + 2t\,\mathrm{Re}(Tu,v) + t^2(Tv,v)$$

$\Rightarrow t\,((1-(Tv,v))t - 2\,\mathrm{Re}(Tu,v)) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(Tu,v) = 0$ Usando iv al posto di v, troviamo

$\mathrm{Im}(Tu,v) = 0 \Rightarrow Tu \perp v \quad \forall v$ ortogonale a u.

Ma questo implica che $Tu = \lambda u$. Allora
$$\pm \|T\| = (Tu, u) = \lambda \|u\|^2 = \lambda$$ $\triangle$

- T autoaggiunto, u, v autovettori corrispondenti ad autovalori diversi $\Rightarrow u \perp v$
- T autoaggiunto, $V \subset H$ sottosp vett chiuso T-invariante $\Rightarrow V^\perp$ è T-invariante

<u>Esempio</u> $H = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $f \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$
Allora $M_f : L^2 \to L^2$, $M_f u = fu$ è lineare e continuo
$M_f^* = M_{\bar{f}} \Rightarrow M_f$ è autoaggiunto $\Leftrightarrow f$ è reale q.o.
$M_f u = \lambda u \Leftrightarrow fu = \lambda u \Leftrightarrow (f - \lambda) u = 0$
Quindi λ è un autovalore di M_f se e solamente se
$$\mu(f^{-1}(\lambda)) > 0$$
In questo caso, ogni $u \in L^2$ nulla in $X \setminus f^{-1}(\lambda)$ è autovettore.
Se $X = [0,1]$ con la misura di Lebesgue e $f(x) = x$, M_f non ha autovalori.

<u>Es</u> Chi è lo spettro di M_f?

<u>Operatori autoaggiunti compatti</u>

- Se $T \in \mathcal{L}_c(H)$ e $\lambda \neq 0 \Rightarrow \dim \underbrace{\mathrm{Ker}(\lambda I - T)}_{= E_\lambda} < \infty$

Infatti $T|_{E_\lambda} = \lambda I$ e dato che $\lambda \neq 0$ questo operatore è compatto $\Leftrightarrow \dim E_\lambda < \infty$ (la palla chiusa di uno spazio di dimensione infinita non è mai compatta)

• T compatto autoaggiunto $\Rightarrow$ la funzione
$u \mapsto |(Tu,u)|$
assume massimo su ∂B. Quindi $\|T\|$ o $-\|T\|$ è autovalore.

$\overline{B}$ è debolmente compatto per successioni. T compatto $\Rightarrow$
T manda successioni debolmente conv. in succ. fortemente conv. $\Rightarrow$
$u \mapsto |(Tu,u)|$ debolmente sequenzialmente continua
$\Rightarrow$ Assume massimo su $\overline{B}$ e riscalando il massimo è assunto su ∂B (poiché $|(Tru,ru)| = r^2 |(Tu,u)|$)

Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti. H spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto compatto. Siano $H_0 = \operatorname{Ker} T$ e $H_1 = H_0^{\perp}$. Allora H_1 è T-invariante, è separabile e possiede una base hilbertiana composta da autovettori di T (reali non nulli) di T. Quando $\dim H_1 = \infty$, questi autovalori hanno molteplicità finita e tendono a 0.

Quindi $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\text{Autovalori di } T\}$

dim Sappiamo già che $H_1 = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ è T-invariante.
Studiamo la restrizione $T_1 = T|_{H_1} \in \mathcal{L}(H_1)$, operatore compatto autoaggiunto iniettivo.
Sia $\sigma_1 = \|T_1\| > 0$. Per quanto visto, $\pm\sigma_1$ è un autovalore di T_1. Sia $H_2 = (\operatorname{Ker}(\sigma_1 I - T) + \operatorname{Ker}(-\sigma_1 I - T))^{\perp}$.
Allora H_2 è T_1-invariante e definisco $T_2 = T|_{H_2} \in \mathcal{L}(H_2)$.
Iterando, si trovano numeri positivi $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \dots$
tali che $\pm\sigma_j$ è autovalore di T. Se l'iterazione si blocca, ossia se un certo $H_k = (0)$, allora H_1 ha dimensione finita e non c'è altro da dimostrare. Supponiamo quindi che l'iterazione non si blocchi e definisca quindi una successione $(\sigma_n)_{n \geq 1}$

Risulta $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Altrimenti, se fosse $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma > 0$ ((σ_n) è positiva decrescente), scelto $u_n \in H$ tale che $\|u_n\| = 1$ e $Tu_n = \pm\sigma_n u_n$, si ha che $Tu_n \perp Tu_m$ per $n \neq m$ e $\|Tu_n\| \geq \sigma$ $\Rightarrow$ (Tu_n) non possiede sottosuccessioni convergenti.
La somma $\sum_{n\geq 1} (E_{\sigma_n} + E_{-\sigma_n})$ è densa in H_1, poiché per costruzione il suo ortogonale è uno spazio T-invariante su cui $\|T\| = 0$ e T è iniettivo su H_1. Perciò H_1 è separabile e la successione di autovettori così costruita ne è una base hilbertiana. $\square$

<u>Teorema</u> (Caratterizzazione variazionale di Courant degli autovalori) T operatore compatto autoaggiunto sullo spazio di Hilbert H. Allora se ordiniamo gli autovalori non nulli di T e li contiamo con molteplicità come segue

$$\lambda_{-1} \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-3} \leq \dots < 0 < \dots \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 ,$$

si ha

$$\lambda_n := \inf_{V\in Gr_{n-1}(H)} \sup_{\substack{u\in V^\perp \\ \|u\|=1}} (Tu,u)$$

$$\lambda_{-n} := \sup_{V\in Gr_{n-1}(H)} \inf_{\substack{u\in V^\perp \\ \|u\|=1}} (Tu,u)$$

dove $Gr_k(H)$ indica l'insieme di tutti i sottospazi vettoriali di dimensione k di H.

<u>Es</u> Sia $T : L^2(0,1) \circlearrowleft$ $Tu(x) := \int_0^x u(t)\,dt$.
Studiare la decomposizione spettrale di T^*T.