

Proiettori

Un'applicazione lineare continua $P: H \rightarrow H$ tale che $P^2 = P$ si dice un proiettore.

(più in generale, questa nozione è quella di spazio proiettivo anche per spazi di Banach, o anche spazi vettoriali topologici)

- $I - P$ è ancora un proiettore: $(I - P)^2 = (I - P)(I - P)$
 $= I - P - P + P^2 = I - P$

- $\text{Im } P = \{ \text{punti fissi di } P \} = \text{Ker}(I - P)$

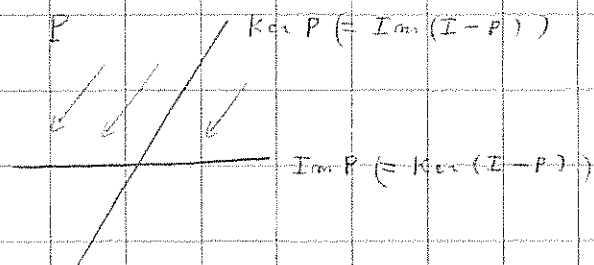
$$u \in \text{Im } P \Rightarrow u = Pv \Rightarrow (I - P)Pv = Pv - P^2v = 0$$

$$(I - P)u = 0 \Rightarrow u = Pu \in \text{Im } P$$

In particolare, l'immagine di un proiettore è chiusa.

Es* Costruire un'applicazione lineare e continua $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

tale che $\text{Im } T$ non sia chiusa.



- $H = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$, since $\begin{cases} \text{Ker } P \cap \text{Im } P = 0 \\ \text{Ker } P + \text{Im } P = H \end{cases}$

$$\text{Ker } P \cap \text{Im } P = \text{Ker } P \cap \text{Ker}(I - P) = 0$$

$$\begin{matrix} u \\ u \end{matrix} \quad Pu = 0 \text{ \& } (I - P)u = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{Ker } P + \text{Im } P = \text{Im}(I - P) + \text{Im } P$$

$$u \in H \quad u = u - Pu + Pu \in \text{Im}(I - P) + \text{Im } P$$

Un proiettore definisce una decomposizione in somma diretta di 2 sottospazi chiusi.

- P è autoaggiunto, ossia $(Pu, v) = (u, Pv) \quad \forall u, v \in H$,
 se e solamente se la decomposizione $H = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$
 è ortogonale, ossia se i due spazi sono ortogonali.
 In questo caso, il proiettore si dice ortogonale.

P autoaggiunto, $u \in \text{Ker } P$, $v \in \text{Im } P$ ossia $v = Pu$

$$(u, v) = (u, Pu) = (Pu, u) = (0, u) = 0$$

$$\text{Ker } P \perp \text{Im } P \quad (Pu, v) = (Pu, v - Pv) + (Pu, Pv) = (Pu, Pv) \\ (u, Pv) = (u - Pu, Pv) + (Pu, Pv) = (0, Pv) = 0$$

Es* Dimostrare che un proiettore è ortogonale $\Leftrightarrow$ è 1-Lipshitz

Notazione $u^\perp := \{v \in H \mid (v, u) = 0\}$ sp. vett. chiuso

$$A \subset H \quad A^\perp := \bigcap_{u \in A} u^\perp \quad \text{sp. vett. chiuso}$$

- Se P è un proiettore ortogonale, $\text{Ker } P = (\text{Im } P)^\perp$

Teorema V sottosp. chiuso $\Rightarrow \exists!$ P proiettore ort. con $\text{Im } P = V$.

Im part. $H = V \oplus V^\perp$ 1-Lipshitz

dim Sia $P: H \rightarrow H$ l'applicazione che a $u \in H$ associa il
 punto di V ad esso più vicino. (Corollario 1 vale ancora)

$$\|u - P(u)\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$$

- $P(u)$ è il vettore $w \in V$ tale che $w - u \in V^\perp$

- La caratterizzazione implica che P è lineare.

Dato che ovviamente $P^2 = P$, P è un proiettore

P è anche caratterizzabile, $\text{Ker } P = \text{Im}(I - P) \subset V^\perp$

Quindi P è il proiettore ortogonale su $V \Rightarrow$ $\square$

$\square$

Proprietà del complemento ortogonale (per esercizio*)

$A \subset H$ sottospazio

0) $0^\perp = H, H^\perp = 0$

1) $A \cap A^\perp = \{0\}$

2) $A \subset A^{\perp\perp}$

3) $A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$

4) $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$

5) V sottospazio vett. chiuso $\Rightarrow V^{\perp\perp} = V$

6) $A^{\perp\perp} = \overline{\text{Span } A} :=$ più piccolo sottospazio vett. chiuso che cont. A

7) V sottospazio vett. t.c. $V^\perp = 0 \Rightarrow V$ denso

8) $V \perp W$ sottosp. chiusi $\Rightarrow V + W$ è chiuso

9) V, W sottosp. $\Rightarrow (V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$

10) V, W sottosp. $\Rightarrow (V \cap W)^\perp = \overline{V^\perp + W^\perp}$

Es * Costruire due sottospazi chiusi di ℓ^2 tali che la loro somma non sia chiusa.

Funzionali lineari

Un funzionale lineare su uno spazio di Hilbert H è un'applicazione lineare e continua $H \rightarrow \mathbb{C}$.

Teorema di Riesz I funzionali lineari su H sono tutte e sole le applicazioni $u \mapsto (u, v)$, al variare di $v \in H$.

dim Sia $\xi: H \rightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare. Allora $V = \ker \xi$ è un sottospazio vettoriale chiuso. Se $V = H$ prendiamo $v = 0$, altrimenti $H = V \oplus V^\perp$ con $V^\perp \neq 0$.

In quest' caso, $\dim V^\perp = 1$, poiché $\xi|_{V^\perp}: V^\perp \rightarrow \mathbb{C}$ è iniettiva.

Fisso $w \in V^\perp$, $\|w\| = 1$ e cerco v della forma $v = \lambda w$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oppure. Dovendo risultare $\xi(v) = \|v\|^2$,

ovvero $\lambda \xi(w) = |\lambda|^2 = \lambda \bar{\lambda}$, scelgo $\lambda = \overline{\xi(w)}$.

Con questa scelta, decompongo un arbitrario $u \in H$

come $u = u_0 + \mu w$ con $u_0 \in V$ e $\mu \in \mathbb{C}$ ri-

le:

$$\xi(u) = \xi(u_0 + \mu w) = \mu \xi(w) = \mu \bar{\lambda}$$

$$(u, v) = (u_0 + \mu w, \lambda w) = \mu \bar{\lambda}$$

$$\text{Quindi } \xi(u) = (u, v) \quad \forall u \in H$$

□

Famiglie sommabili

X spazio di Banach

$\{u_j\}_{j \in J}$ si dice sommabile con somma $u \in X$ se

$\forall \varepsilon > 0 \exists J_0 \subset J$ finito tale che $\forall J_1$ finito e

$$J_0 \subset J_1 \subset J \text{ risulta } \left\| \sum_{j \in J_1} u_j - u \right\| < \varepsilon \quad \sum_{j \in J} u_j = u$$

oss Se $X = \mathbb{C}$ e $J = \mathbb{N}$, si ritrova la nozione di convergenza assoluta.

$$\bullet \sum_{j \in J} u_j = u \Rightarrow \sum_{j \in J} \lambda u_j = \lambda u$$

$$\bullet \sum_{j \in J} u_j = u, \sum_{j \in J} v_j = v \Rightarrow \sum_{j \in J} (u_j + v_j) = u + v$$

$$\bullet, \text{ se } X \text{ è un Hilbert, } \left(\sum_{j \in J} u_j, \sum_{j \in J} v_j \right) = (u, v)$$

Criterio di Cauchy $\{u_j\}_{j \in J}$ è sommabile se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \exists J_0 \subset J$ finito tale che $\forall J' \subset J \setminus J_0$ finito
risulta $\left\| \sum_{j \in J'} u_j \right\| < \varepsilon$. Inoltre se $\{u_j\}_{j \in J}$ è
sommabile, l'insieme $\{j \in J \mid u_j \neq 0\}$ è al più
numerabile.

dim

- Se $\sum_{j \in J} u_j = u$, scegli $J_0 \subset J$ finito tale che
 $\left\| \sum_{j \in J_1} u_j - u \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni J_1 finito che contiene J_0 .
Se J' è finito e disjointo da J_0

$$\left\| \sum_{j \in J'} u_j \right\| = \left\| \sum_{j \in J' \cup J_0} u_j - \sum_{j \in J_0} u_j \right\| \leq \left\| \sum_{j \in J' \cup J_0} u_j - u \right\| + \left\| \sum_{j \in J_0} u_j - u \right\| < \varepsilon$$

- Se la condizione di Cauchy è soddisfatta, $\exists$
 J_m finito tale che $\left\| \sum_{j \in J'} u_j \right\| < \frac{1}{m}$ se $J' \cap J_m = \emptyset$.

A meno di rimpiazzare J_m con $J_1 \cup \dots \cup J_m$, possiamo
supporre $J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots$

Se $m \geq n$

$$\left\| \sum_{j \in J_m} u_j - \sum_{j \in J_n} u_j \right\| = \left\| \sum_{j \in J_m \setminus J_n} u_j \right\| < \frac{1}{m}$$

Quindi $\left(\sum_{j \in J_m} u_j \right)_m$ è di Cauchy e converge ad
un certo $u \in X$. Allora $\sum_{j \in J} u_j = u$

In fatti, dato $\varepsilon > 0$, sia m_0 t.c.

$$\left\| \sum_{j \in J_m} u_j - u \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq m_0$$

Se $m \geq m_0$, $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ e J' contiene J_m , risulta

$$\left\| \sum_{j \in J'} u_j - u \right\| \leq \left\| \sum_{j \in J_m} u_j - u \right\| + \left\| \sum_{j \in J' \setminus J_m} u_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m} < \varepsilon$$

Se i J_n sono cose finite, sia $J_\infty = \bigcup_n J_n$. Se $j \notin J_\infty$
 $\|u_j\| < \frac{1}{n} \quad \forall n > 0 \Rightarrow u_j = 0$ $\square$

Sia H uno spazio di Hilbert.

Disuguaglianza di Bessel $\{u_j\}_{j \in J}$ famiglia
 ortogonale, $u \in H$. Allora

$$\sum_{j \in J} |(u, u_j)|^2 \leq \|u\|^2$$

Ovvio, poiché $\sum_{j \in J} |(u, u_j)|^2 = \sup_{J_0 \subset J \text{ finito}} \sum_{j \in J_0} |(u, u_j)|^2$

e dunque possiamo applicare la disuguaglianza di Bessel
 per famiglie finite.

Teorema di Pitagora generalizzato Una famiglia
 ortogonale $\{u_j\}_{j \in J}$ è sommabile se e solo se

$$\sum_{j \in J} \|u_j\|^2 < \infty$$

In questo caso

$$\left\| \sum_{j \in J} u_j \right\|^2 = \sum_{j \in J} \|u_j\|^2$$

dim

Se $\{u_j\}_{j \in J}$ è sommabile, $\forall \varepsilon > 0$ esiste J_0 finito t.c.

$$\left\| \sum_{j \in J'} u_j \right\| < \varepsilon \quad \text{se } J' \cap J_0 = \emptyset \quad \text{Anzi}$$

$$\sum_{j \in J'} \|u_j\|^2 = \left\| \sum_{j \in J'} u_j \right\|^2 < \varepsilon^2$$

Perciò $\{\|u_j\|^2\}$ è sommabile.

Viceversa, se $\sum_{j \in J} \|u_j\|^2$ trova J_0 finito t.c.

$$\sum_{j \in J_0'} \|u_j\|^2 < \varepsilon \quad \text{Anzi se } J' \cap J_0 = \emptyset \text{ e } J' \text{ finito}$$

$$\left\| \sum_{j \in J'} u_j \right\|^2 = \sum_{j \in J'} \|u_j\|^2 < \varepsilon, \quad \text{dove}$$

cioè $\{u_j\}_{j \in J}$ è sommabile.