18.5.2010

Lo spettro di un operatore limitato

X spazio di Banach complesso, $L(X) = \{$operatori lineari e continui da X in $X\}$.

- X è uno spazio di Banach con $\|\cdot\|$ norma operatoriale
- $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$
- $\|I\| = 1$

$L(X)$ è un'algebra di Banach unitaria

- Se $\|T\| < 1 \Rightarrow I - T$ è invertibile e $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$

Corollario Se $T \in GL(X) := \{T \in L(X) \mid T \text{ invertibile}\}$, allora $B_{\frac{1}{\|T^{-1}\|}}(T) \subset GL(X)$. Inoltre, l'applicazione

$$Inv: GL(X) \to L(X), \quad T \mapsto T^{-1}$$

è differenziabile, con

$$D\,Inv(T)[H] = -T^{-1}HT^{-1}$$

dim

Se $\|H\| < \|T^{-1}\|^{-1} \Rightarrow \|T^{-1}H\| < 1 \Rightarrow I + T^{-1}H \in GL(X)$

e $T + H = T(I + T^{-1}H) \in GL(X)$. Inoltre

$(T+H)^{-1} - T^{-1} = ((I + T^{-1}H)^{-1} - I)\,T^{-1} =$

$= (I - T^{-1}H + O(\|H\|^2) - I)\,T^{-1} = -T^{-1}HT^{-1} + O(\|H\|^2)$ □

$\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid zI - T \notin GL(X)\}$ spettro di T

- Se un operatore non è invertibile, allora o non è iniettivo o non è suriettivo, ma in dimensione infinita le due cose non sono equivalenti: si vedano i due shift su ℓ^2. Gli $z \in \mathbb{C}$ per cui $zI - T$ non è iniettivo si dicono autovalori
- Per il Corollario sopra, $\sigma(T)$ è un chiuso.

• $z \in \sigma(T) \Rightarrow |z| \leq \|T\|$ Quindi $\sigma(T) \subset D_{\|T\|}$ è compatto.

Infatti: se $|z| > \|T\| \Rightarrow \|(zI - T) - zI\| = \|T\| < |z| = \|(zI)^{-1}\|^{-1}$
$\Rightarrow zI - T \in GL(X)$ per il Corollario.

<u>Teorema</u> Se $T \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(T)$ è un compatto non vuoto.

<u>dim</u>

Dobbiamo solo dimostrare $\sigma(T) \neq \emptyset$. Fissiamo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$
e sia $\varphi \in \mathcal{L}(X)^*$ tale che

$$\varphi((z_0 I - T)^{-1}) \neq 0$$

Sia $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to \mathbb{C}$ la funzione

$$f(z) := \varphi((zI - T)^{-1})$$

Se $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ e $h \in \mathbb{C}$ ha valore assoluto piccolo,

$$f(z+h) - f(z) = \varphi(((z+h)I - T)^{-1} - (zI - T)^{-1}) =$$
$$= \varphi(-(zI-T)^{-1} hI (zI-T)^{-1} + o(|h|)) = h\varphi(I) + o(|h|)$$

Quindi f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Inoltre

$$\|(zI - T)^{-1}\| = |z|^{-1} \|(I - z^{-1}T)^{-1}\| \leq |z|^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} |z|^{-m} \|T\|^m = \frac{|z|^{-1}}{1 - |z|^{-1}\|T\|}$$
$$= \frac{1}{|z| - \|T\|} = o(1) \text{ per } |z| \to \infty, \text{ da cui}$$

$$|f(z)| \leq \|\varphi\| \frac{1}{|z| - \|T\|}$$ è infinitesima all'infinito.

Però $f(z_0) \neq 0$, quindi $\sigma(T) \neq \emptyset$ poiché altrimenti $f \neq 0$ sarebbe una funzione olomorfa infinitesima all'infinito, contraddicendo il teorema di Liouville. $\square$

<u>Esempio 1</u> $X = \ell^2$, $S \in \mathcal{L}(\ell^2)$ $(Su)(m) = u(m+1)$ shift surgettivo, $\operatorname{Ker} S = \mathbb{C} e_1$. $\sigma(S) \subset D_{\|S\|} = D_1$.

In effetti, $\sigma(S) = D_1$: se $|z| < 1$, l'equazione

$(zI - S)u = 0 \iff zu(m) - u(m+1) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

ha soluzione $u(m) = z^m u(0)$ che appartiene a ℓ^2

per ogni scelta di $u(0) \in \mathbb{C}$. Quindi $zI - S$ non è iniettiva per $|z| < 1 \Rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subset \sigma(S)$ ed essendo questo un chiuso, $\sigma(S) = D_1$.
Se $|z| = 1$, $zI - S$ è iniettiva ma non surgettiva.

Es Determinare lo spettro, distinguendo i punti di non iniettività e di non surgettività, dello shift iniettivo $D \in \mathcal{L}(\ell^2)$, $(Du)(0) = 0$, $(Du)(n) = u(n-1)$ $\forall n \geq 1$, e dello shift S su $\ell^2(\mathbb{Z})$.

- Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\sigma(\lambda T) = \lambda\sigma(T)$, $\sigma(\lambda I + T) = \lambda + \sigma(T)$.
  Più in generale:
- $p \in \mathbb{C}[z] \Rightarrow \sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

dim

$z_0 \in \sigma(T) \Rightarrow T - z_0 I$ non invertibile e scrivendo
$p(z) - p(z_0) = (z - z_0)q(z)$ con $q \in \mathbb{C}[z]$ si ha
$p(T) - p(z_0)I = (T - z_0 I)q(T)$ non invertibile $\Rightarrow p(z_0) \in \sigma(p(T))$
$w \in \sigma(p(T)) \Rightarrow p(T) - wI$ non invertibile. Fattorizziamo
$p(z) - w = c\prod_{j=1}^{d}(z - \alpha_j)$. Se nessun α_j appartiene a $\sigma(T)$,
$p(T) - wI = c\prod_{j=1}^{d}(T - \alpha_j I)$ risulterebbe invertibile.
Quindi esiste $j \in \{1, \dots, d\}$ t.c. $\alpha_j \in \sigma(T) \Rightarrow w = p(\alpha_j) \in p(\sigma(T))$ Δ

Es Se f è una funzione razionale senza poli su $\sigma(T)$, allora è ben definito l'operatore $f(T)$ e $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Teorema (Formula del raggio spettrale) Se $T \in \mathcal{L}(X)$ allora

$$\underset{\max\{|z| \mid z \in \sigma(T)\}}{\overset{\rho(T)}{\parallel}} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n>0} \|T^n\|^{1/n}$$

dim

$z \in \sigma(T) \Rightarrow z^m \in \sigma(T^m) \Rightarrow |z|^m \leq \|T^m\| \Rightarrow |z| \leq \|T^m\|^{1/m}$

da cui $\rho(T) \leq \inf_{m>0} \|T^m\|^{1/m}$.

Se $\|zT\| < 1$, ossia $|z| < 1/\|T\|$, si ha

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m T^m = (I - zT)^{-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z} I - T\right)^{-1}$$

La funzione a destra è olomorfa per $\frac{1}{|z|} > \rho(T)$, ossia per $|z| < 1/\rho(T)$. Quindi la serie di potenze a sinistra ha raggio di convergenza maggiore o uguale di $1/\rho(T)$, ossia

$$\limsup_m \|T^m\|^{1/m} \leq \rho(T)$$

Concludiamo osservando che

$$\rho(T) \leq \inf_{m>0} \|T^m\|^{1/m} \leq \liminf_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \rho(T). \qquad \square$$

Esempio $X = \mathbb{C}^2$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(T) = 0$, $\|T\| = 1$, $\|T^2\| = 0$

Esempio (Operatore di Volterra) $X = C([0,1])$,

$$(Tu)(x) = \int_0^x u(t)\,dt.$$

T è iniettivo, ma non surgettivo poiché la sua immagine è $\{v \in C^1([0,1]) \mid v(0) = 0\}$.

Quindi $0 \in \sigma(T)$ ma non è un autovalore.

Se $z \neq 0$, studiamo la risolubilità di $(zI - T)u = w$, ossia

$$z\,u(x) - \int_0^x u(t)\,dt = w(x),$$

dove $w \in C([0,1])$ è fissata. Post. $v(x) = \int_0^x u(t)\,dt$, l'equazione diventa $\begin{cases} z v'(x) - v(x) = w(x) \\ v(0) = 0 \end{cases} \iff v'(x) - \frac{1}{z} v(x) = \frac{w(x)}{z}$

$$e^{-\frac{x}{z}}\left(v'(x) - \frac{1}{z} v(x)\right) = \frac{d}{dx}\, e^{-\frac{x}{z}} v(x) = e^{-\frac{x}{z}} \frac{w(x)}{z}$$

$$e^{-\frac{x}{z}} v(x) = \frac{1}{z}\int_0^x e^{-\frac{t}{z}} w(t)\,dt \Rightarrow v(x) = \frac{e^{x/z}}{z}\int_0^x e^{-t/z} w(t)\,dt$$

Tenendo conto che dall'equazione si ha $u(0) = \frac{w(0)}{z}$, troviamo

$$u(x) = \frac{w(0)}{z} + \int_0^x \left(\frac{e^{s/z}}{z} \int_0^s e^{-t/z} w(t)\, dt \right) ds$$

$$= \frac{w(0)}{z} + \int_0^x \left(e^{\frac{x-t}{z}} - 1 \right) w(t)\, dt$$

Quindi $zI - T$ è invertibile $\forall z \neq 0 \Rightarrow \sigma(T) = \{0\}$

Es Verificare che se T è l'operatore di Volterra, allora $\|T^n\|^{1/n} \to 0$

Es Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\rho(T) < 1$. Mostrare che $\|x\|_* := \sum_{n \geq 0} \|T^n x\|$ è una norma equivalente su X, rispetto alla quale T è una contrazione.

Operatori compatti

Def. $T \in L(X,Y)$ si dice **compatto** se manda limitati in pre-compatti, o equivalentemente se TB_X è pre-compatto.

- Se $\dim X < \infty$ oppure $\dim Y < \infty$, allora ogni $T \in L(X,Y)$ è compatto.
- Se $T \in L(X,Y)$ ha rango finito (ossia $\dim TX < \infty$), allora è compatto.

Esempio L'operatore di Volterra è compatto:
$TB_1 = \{ x \mapsto \int_0^x u(t)\,dt \mid u \in C([0,1]),\ \|u\|_\infty < 1 \}$ è un sottoinsieme di $C([0,1])$ equilimitato e equicontinuo.

- $T \circ S$ è compatto se uno dei due lo è. In particolare,
$$L_c(X) := \{ T \in L(X) \mid T \text{ compatto} \}$$
è un ideale bilater. dell'algebra $L(X)$.

- $L_c(X,Y)$ è chiuso in $L(X,Y)$
$TB_X \subset T_n B_X + \|T_n - T\| B_Y$, quindi se $(T_n) \subset L_c(X,Y)$ converge a T, allora TB_X è totalmente limitato.

- $T \in L_c(X,Y)$, $x_n \to x$ in $\sigma(X,X^*)$ $\Rightarrow$ $Tx_n \to Tx$ in Y
Infatti $x_n \to x$ $\Rightarrow$ (x_n) è limitata $\Rightarrow$ (Tx_n) è compatta in Y
Inoltre $Tx_n \to Tx$ in $\sigma(Y,Y^*)$. Ma queste due cose implicano $Tx_n \to Tx$ in Y.

Oss Quindi gli operatori compatti sono sequenzialmente continui dalla topologia debole nella forte.

Es Se X è separabile e riflessivo, allora son fatti equivalenti per $T \in \mathcal{L}(X,Y)$:

1) T compatto
2) T seq. continuo dalla top. debole nella forte
3) T continuo dalla top. debole nella forte

Prop Se H è uno spazio di Hilbert, ogni $T \in \mathcal{L}_c(X,H)$ è limite in norma di operatori di rango finito.

dim

Dato che TB_X è pre-compatto, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists v_1, \dots, v_N \in H$ tali che $TB_X \subset \bigcup_{j=1}^{N} (v_j + \varepsilon B_H)$. Sia $V = \text{Span}\{v_j \mid 1 \le j \le N\}$ e sia P il proiettore ortogonale su V. Allora PT ha rango finito e

$$\|T - PT\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx - PTx\| = \sup_{v \in TB_X} \|v - Pv\|$$

Ma se $v \in TB_X$, $\exists j \in \{1, \dots, N\}$ t.c. $\|v - v_j\| < \varepsilon$, da cui $\|v - Pv\| \le \|v - v_j\| < \varepsilon$ (Pv è il punto di V che realizza la minima distanza da v).

Perciò $\|T - PT\| \le \varepsilon$. $\square$