

Topologia debole-*

X spazio di Banach

Sia $J: X \hookrightarrow X^{**}$ l'immersione canonica nel bidual:

$\forall x \in X \quad Jx \in X^{**} = (X^*)^*$ è il funzionale lineare e continuo su X^* che a $\varphi \in X^*$ associa $\langle \varphi, x \rangle$,
ovvero
$$\langle Jx, \varphi \rangle_{X^{**}} = \langle \varphi, x \rangle_{X^*}$$

Dato che $\|Jx\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{\varphi \in X^* \\ \|\varphi\|_{X^*} \leq 1}} |\langle \varphi, x \rangle| = \|x\|_X$ (in

effetti sappiamo anche che è un max), J è un'isometria

In particolare, J è iniettiva ed ha immagine chiusa

Defn Se J è anche surgettiva, X si dice riflessivo

Vedremo che esistono spazi in cui J non è surgettiva

Ques Esistono anche spazi non riflessivi tale che

X è isomorfo a X^{**} (ovviamente non tramite J)

- Gli spazi di Hilbert sono riflessivi: se identifichiamo $H = H^* = H^{**}$ tramite il prodotto scalare, J è l'identità.

Defn La topologia debole-* (o anche $\sigma(X^*, X)$) su

X^* è la topologia meno fine che rende continui

tutti gli elementi di $J(X) (\subseteq X^{**})$

In generale è una topologia meno fine della topologia debole di X^* (che richiede che tutti gli elementi di X^{**})

Se X è riflessivo, la topologia debole-* e la debole su X^* , ossia $\sigma(X^*, X^{**})$, coincidono.

- $\varphi_m \xrightarrow{*} \varphi \iff \langle \varphi_m, x \rangle \rightarrow \langle \varphi, x \rangle \quad \forall x \in X$
(mentre $\varphi_m \rightarrow \varphi \iff \langle \zeta, \varphi_m \rangle \rightarrow \langle \zeta, \varphi \rangle \quad \forall \zeta \in X^{**}$)
- $\varphi_m \rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi_m \xrightarrow{*} \varphi \Rightarrow \varphi_m \xrightarrow{*} \varphi$
- La topologia $\sigma(X^*, X)$ è Hausdorff.

Se $\varphi \neq \psi \in X^* \Rightarrow \exists x \in X$ t.c. $\langle \varphi, x \rangle \neq \langle \psi, x \rangle$,
quindi, posto $d := |\langle \varphi - \psi, x \rangle| > 0$, gli
insiemi $\{ \xi \in X^* \mid |\langle \xi - \varphi, x \rangle| < \frac{d}{2} \}$ e
 $\{ \xi \in X^* \mid |\langle \xi - \psi, x \rangle| < \frac{d}{2} \}$ sono insiemi
disgiunti di φ e ψ .

- Una base di intorni di $\varphi \in X^*$ per $\sigma(X^*, X)$ è
data dagli aperti della forma

$$V = \{ \psi \in X^* \mid |\langle \psi - \varphi, x_j \rangle| < \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, N \}$$

al variare di $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $x_1, \dots, x_N \in X$.

- Se $\varphi_m \xrightarrow{*} \varphi \Rightarrow (\varphi_m)$ è limitata e
$$\|\varphi\| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_m\|$$

Usare la limitatezza per dualità

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\langle \varphi, x \rangle| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \lim_{m \rightarrow \infty} |\langle \varphi_m, x \rangle| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_m\| \|x\| = \limsup_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_m\| \end{aligned}$$

- Se $\varphi_m \xrightarrow{*} \varphi$ e $x_m \rightarrow x \Rightarrow \langle \varphi_m, x_m \rangle \rightarrow \langle \varphi, x \rangle$
Aggiungere e sottrarre $\langle \varphi_m, x \rangle$

Teorema (Banach-Alaoglu)

La palla chiusa di X^* , $\bar{B}_{X^*} = \{\varphi \in X^* \mid \|\varphi\| \leq 1\}$,
è compatta per la topologia debole-*

Vedo X^* come sottoinsieme di $\mathbb{C}^X$

Muniamo $\mathbb{C}^X$ della topologia prodotto, ossia della
topologia meno fine che rende continue tutte le
proiezioni $p_x: \mathbb{C}^X \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$, il versore
di $x \in X$. Questa topologia induce la topologia
debole-*

$\bar{B}_{X^*} = \{\varphi \in \mathbb{C}^X \mid \varphi \text{ è lineare, } |\varphi(x)| \leq \|x\| \forall x \in X\}$
l'insieme

$$K = \{\varphi \in \mathbb{C}^X \mid |\varphi(x)| \leq \|x\|\} = \prod_{x \in X} \bar{D}_{\|x\|},$$

dove $\bar{D}_r$ è il disco chiuso di raggio r in $\mathbb{C}$, è
compatta per il teorema di Tychonoff

Le applicazioni lineari formano un sottoinsieme
chiuso di $\mathbb{C}^X$: $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in X$ fissati
gli insiemi

$$A_{\lambda, x} = \{\varphi \in \mathbb{C}^X \mid \varphi(\lambda x) - \lambda \varphi(x) = 0\}$$

$$B_{x, y} = \{\varphi \in \mathbb{C}^X \mid \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = 0\}$$

sono chiusi essendo luoghi di zeri di applicazioni
continue, e

$$\{\text{App. line. } X \rightarrow \mathbb{C}\} = \bigcap_{\lambda, x} A_{\lambda, x} \cap \bigcap_{x, y} B_{x, y}$$

Quindi $\bar{B}_{X^*}$ è un sottoinsieme chiuso del compatto
 K , dunque è compatto.

Teorema (Kakutani)

X spazio di Banach Allora $\overline{B}_X$ è debolmente compatto
se e solo se X è riflessivo

$\Leftarrow$) Se X è riflessivo, J è un'isometria surgettiva da
 X in X^{**} , in particolare manda $\overline{B}_X$ bigettivamente
su $\overline{B}_{X^{**}}$. Per Banach-Alaoglu, $\overline{B}_{X^{**}}$ è compatto per
la topologia debole* di X^{**} , ossia $\sigma(X^{**}, X^*)$.
Quindi basta verificare che

$$J^{-1} : (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)) \rightarrow (X, \sigma(X, X^*))$$

è continua, ossia che per ogni $\varphi \in X^*$, $\varphi \circ J^{-1}$ è
continua su $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$. Se $z \in X^{**}$,

$$\varphi \circ J^{-1}(z) = \langle \varphi, J^{-1}(z) \rangle_{X^*, X} = \langle z, \varphi \rangle_{X^{**}, X^*} \text{ è continua}$$

per definizione di topologia debole* $\sigma(X^{**}, X^*)$ Δ

Per il viceversa, dimostriamo i seguenti lemmi.

Lemma (Helly) X spazio di Banach, $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in X^*$,

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$ Allora sono equivalenti:

a) $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X$ t.c. $\|x_\varepsilon\| \leq 1$ e

$$|\langle \varphi_j, x_\varepsilon \rangle - \lambda_j| < \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, N$$

b) $|\langle \lambda, \beta \rangle| \leq \left\| \sum_{j=1}^N \overline{\beta_j} \varphi_j \right\| \quad \forall (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{C}^N$

dim

a) $\Rightarrow$ b) Fissato $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{C}^N$ e $\varepsilon > 0$, per (a) $\exists x_\varepsilon$

per cui

$$\left| \sum_{j=1}^N \overline{\beta_j} \langle \varphi_j, x_\varepsilon \rangle - \sum_{j=1}^N \overline{\beta_j} \lambda_j \right| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^N |\overline{\beta_j}|$$

da cui

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j \alpha_j \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j \langle \varphi_j, x_\varepsilon \rangle \right| + \varepsilon \sum_{j=1}^N |\beta_j| \\
&= \left| \left\langle \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j \varphi_j, x_\varepsilon \right\rangle \right| + \varepsilon \sum_{j=1}^N |\beta_j| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j \varphi_j \right\| \|x_\varepsilon\| + \varepsilon \sum_{j=1}^N |\beta_j| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j \varphi_j \right\| + \varepsilon \sum_{j=1}^N |\beta_j|
\end{aligned}$$

è dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario, b) segue

b) $\Rightarrow$ a) Posto $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ e

$$\phi: X \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad \phi(x) = (\langle \varphi_1, x \rangle, \dots, \langle \varphi_N, x \rangle),$$

la proprietà a) è equivalente a $\alpha \in \overline{\phi(\bar{B}_X)}$

Se per assurdo $\alpha \notin \overline{\phi(\bar{B}_X)}$, dato che quest'insieme è un convesso chiuso di $\mathbb{C}^N$, possiamo rappresentare

$\{\alpha\}$ e $\overline{\phi(\bar{B}_X)}$, ossia $\exists \beta \in \mathbb{C}^N$ e $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\operatorname{Re}(\phi(x), \beta)_{\mathbb{C}^N} < \lambda < \operatorname{Re}(\alpha, \beta)_{\mathbb{C}^N} \quad \forall x \in \bar{B}_X$$

Per la linearità di ϕ , l'estremo superiore del

lato sinistro coincide con

$$\sup_{x \in \bar{B}_X} |\langle \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j \varphi_j, x \rangle| = \sup_{x \in \bar{B}_X} \left| \left\langle \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j \varphi_j, x \right\rangle \right| = \left\| \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j \varphi_j \right\|$$

e la disuguaglianza sopra scritta, adducendo b)

□

Lemma (Goldstine) X spazio di Banach.

Allora $J(\overline{B}_X)$ è denso in $\overline{B}_{X^{**}}$ per la topologia debole-*

dim

$z_0 \in \overline{B}_{X^{**}}$ e V intorno di z_0 per $\sigma(X^{**}, X^*)$. Vogliamo dimostrare che $V \cap J(\overline{B}_X) \neq \emptyset$. Possiamo supporre

$$V = \{z \in X^{**} \mid |\langle \varphi_j, z - z_0 \rangle| \leq \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, N\}$$

con $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in X^*$

Dunque dobbiamo trovare $x \in \overline{B}_X$ tale che $J(x) \in V$,

ovvero

$$|\langle \varphi_j, x \rangle - \langle \varphi_j, z_0 \rangle| \leq \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, N$$

Possiamo $\alpha_j = \langle \varphi_j, z_0 \rangle$. Per ogni $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{C}^N$ si ha

$$\begin{aligned} |(\alpha, \beta)| &= \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \overline{\beta_j} \right| = \left| \sum_{j=1}^N \langle \varphi_j, z_0 \rangle \overline{\beta_j} \right| = \\ &= \left| \left\langle \sum_{j=1}^N \overline{\beta_j} \varphi_j, z_0 \right\rangle \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^N \overline{\beta_j} \varphi_j \right\| \end{aligned}$$

dunque l'esistenza di x segue dal Lemma di Helly.

□

dim (completazione) $\Rightarrow$ nel teorema di Kakutani

Occorre dimostrare che $JX = X^{**}$, o equivalentemente

$J\overline{B}_X = \overline{B}_{X^{**}}$ $J: X \rightarrow X^{**}$ continuo forte $\rightarrow$ forte

$\Rightarrow J$ continuo $\sigma(X, X^*) \rightarrow \sigma(X^{**}, X^{**})$

A fortiori, J continuo $\sigma(X, X^*) \rightarrow \sigma(X^{**}, X^*)$

Da $\overline{B}_X$ $\sigma(X, X^*)$ -compatto segue dunque $J\overline{B}_X$ $\sigma(X^{**}, X^*)$ -

compatto. In particolare, $J\overline{B}_X$ è debole-* chiuso

(la topologia debole-* è Hausdorff) e per il

Lemma di Goldstine, $J\overline{B}_X = \overline{B}_{X^{**}}$

□

Conseguenze

Es X Banach riflessivo, $Y \subseteq X$ sottospazio vettoriale chiuso. Allora Y è riflessivo.

• X riflessivo $\Leftrightarrow X^*$ riflessivo

$\Rightarrow$) $\overline{B}_{X^*}$ è $\sigma(X^*, X)$ -compatta per Banach-Alaoglu

X riflessivo $\Rightarrow \sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$, dunque

$\overline{B}_{X^*}$ è debolmente compatto $\xRightarrow{\text{Kakutani}} X^*$ riflessivo

$\Leftarrow$) Per $\Rightarrow$), X^{**} è riflessivo. $X \cong JX$, sottospazio vettoriale (fortemente) chiuso di X^{**} $\xRightarrow{\text{Es sopra}} X$ riflessivo.

• X spazio riflessivo, $C \subseteq X$ convesso chiuso e limitato. Allora C è debolmente compatto.

• X riflessivo, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa, semi-continua inferiormente (per la topologia indotta dalla norma), f coerciva, f assuefatta.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora f possiede minima: $\exists x_0 \in X$ t.c.

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X$$