

Topologie deboli

X insieme, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ La topologia generata da $\mathcal{F}$, ossia la topologia meno fine tra quelle per cui tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ sono aperti, è

$$\tau := \left\{ \bigcup_{\text{qualunque}} \bigcap_{\text{finita}} \text{elemento di } \mathcal{F} \right\}$$

Es. Verificare che τ è una topologia su X

X insieme, Y spazio topologico, $\Phi \subseteq Y^X$

La topologia meno fine tra quelle che rendono continue tutte le applicazioni $\varphi \in \Phi$ è la topologia τ generata da $\mathcal{F} = \{ \varphi^{-1}(U) \mid \varphi \in \Phi, U \subseteq Y \text{ aperta} \}$

Una base di intorni di $x \in X$ per τ è

$$\left\{ \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(U_j) \mid J \text{ finito}, U_j \subseteq Y \text{ aperta}, \varphi_j \in \Phi, \varphi_j(x) \in U_j \right\}$$

$\Leftarrow V$

$$x_m \xrightarrow{\tau} x \iff \varphi(x_m) \rightarrow \varphi(x) \text{ in } Y \quad \forall \varphi \in \Phi$$

$\Rightarrow$) segue dal fatto che φ è continua

$\Leftarrow$) Sia V un intorno di x . Possiamo assumere

che $V = \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(U_j)$, dove J è finito,

$U_j \subseteq Y$ è aperta, $\varphi_j \in \Phi$ e $\varphi_j(x) \in U_j \quad \forall j \in J$.

Dato che $\varphi_j(x_m) \rightarrow \varphi_j(x) \quad \forall j \in J$ e J è finito,

$\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall m \geq m_0 \quad \varphi_j(x_m) \in U_j \quad \forall j \in J$

$$\Rightarrow x_m \in V \quad \forall m \geq m_0 \Rightarrow x_m \xrightarrow{\tau} x \quad \Delta$$

Sia Z uno spazio topologico.

- $\gamma : Z \rightarrow X$ è continua $\Leftrightarrow \varphi \circ \gamma$ è continua $\forall \varphi \in \Phi$

dim

$\Rightarrow$) $\varphi \circ \gamma$ è composizione di app. continue

$\Leftarrow$) Dato che $\gamma^{-1}(U \cdot) = U \gamma^{-1}(\cdot)$ e $\gamma^{-1}(\cap \cdot) = \cap \gamma^{-1}(\cdot)$,
basta verificare che

$$\gamma^{-1}(\varphi^{-1}(U)) = \gamma^{-1}(U)$$

è aperto, $\forall \varphi \in \Phi$, $\forall U \subset Y$ aperto. Ma
ciò segue dalla continuità di $\varphi \circ \gamma$. Δ

La topologia debole $\sigma(X, X^*)$

Sia X uno spazio di Banach. La topologia $\sigma(X, X^*)$, detta anche topologia debole di X , è la topologia meno fine che rende continui tutti i funzionali di X^* .

Quindi $\sigma(X, X^*)$ è una topologia meno fine di quella metrica indotta dalla norma di X , che viene detta anche topologia forte di X .

- $\sigma(X, X^*)$ è di Hausdorff

$x_1 \neq x_2$ vettori di X . Per la versione geometrica del teorema di Hahn-Banach (separazione stretta di un convesso chiuso da un convesso compatto)

esistono $\varphi \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\operatorname{Re}(\varphi(x_1)) < \alpha < \operatorname{Re}(\varphi(x_2))$$

Allora $V_1 = \{x \in X \mid \operatorname{Re}(\varphi(x)) < \alpha\}$ e $V_2 = \{x \in X \mid \operatorname{Re}(\varphi(x)) > \alpha\}$ sono aperti deboli disgiunti che
contengono x_1 e x_2 rispettivamente. Δ

- Una base di intorni di $x_0 \in X$ per $\sigma(X, X^*)$ è dato dagli insiemi delle forme

$$V = \{x \in X \mid |p_j(x - x_0)| < \varepsilon \quad \forall j \in J\}$$

al variare di J insieme finito, $p_j \in X^*$, $\varepsilon > 0$

In fatti $V = \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z - p_j(x_0)| < \varepsilon\})$

Successioni debolmente convergenti

x_m converge debolmente a x se converge a x nella topologia $\sigma(X, X^*)$. Per quanto visto, ciò è equivalente a $p(x_m) \rightarrow p(x) \quad \forall p \in X^*$.
Si scrive $x_m \rightharpoonup x$.

Notazione Se $p \in X^*$, $x \in X$, $\langle p, x \rangle = p(x)$

Quindi: $x_m \rightharpoonup x \iff \langle p, x_m \rangle \rightarrow \langle p, x \rangle \quad \forall p \in X^*$

$x_m \rightarrow x$ (ovvio $\|x_m - x\| \rightarrow 0$) si dice anche

Convergenza forte

$x_m \rightarrow x \implies x_m \rightharpoonup x$ poiché la topologia forte è più fine della debole. Il viceversa in generale non è vero.

Se H è uno spazio di Hilbert, $x_m \rightharpoonup x \iff$

$(x_m, y) \rightarrow (x, y) \quad \forall y \in H$ (per il teorema di

Riesz Se $\{e_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ è ortonormale

$$\implies \forall y \in H \quad \sum_{m \in \mathbb{N}} |(y, e_m)|^2 \leq \|y\|^2 \quad (\text{Bessel})$$

$$\implies (y, e_m) \rightarrow 0 \implies e_m \rightharpoonup 0$$

Es * In ℓ^2 convergenze deboli e convergenza forte sono equivalenti (anche se le topologie sono diverse, vedi più avanti)

- Se $x_n \rightarrow x$ allora x_n è limitato e

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \quad (x \mapsto \|x\| \text{ è sequenzialmente s.c.i. per la topologia debole})$$

$\forall \varphi \in X^* \langle \varphi, x_n \rangle$ è limitato $\Rightarrow x_n$ è limitato
 (Corollario del teorema di Banach-Steinhaus)

$$|\langle \varphi, x_n \rangle| \leq \|\varphi\| \|x_n\| \Rightarrow |\langle \varphi, x \rangle| \leq \|\varphi\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

$$\Rightarrow \|x\| = \max_{\substack{\varphi \in X^* \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\langle \varphi, x \rangle| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \quad \Delta$$

- Se $x_n \rightarrow x$ e $\varphi_n \rightarrow \varphi$ allora

$$\langle \varphi_n, x_n \rangle \rightarrow \langle \varphi, x \rangle$$

$$|\langle \varphi_n, x_n \rangle - \langle \varphi, x \rangle| \leq |\langle \varphi_n - \varphi, x_n \rangle| + |\langle \varphi, x_n - x \rangle|$$

$$\leq \|\varphi_n - \varphi\| \|x_n\| + |\langle \varphi, x_n - x \rangle| = o(1) O(1) + o(1)$$

Es Mostrare che se $\dim X < \infty$, le topologie forte e la debole coincidono.

Es - Mostrare che X munito della topologia debole è uno spazio vettoriale topologico.

Topologie deboli e convergenza

Prop $C \subset X$ convessa. Allora C è chiuso se e solamente se è debolmente chiuso.

$\Leftarrow$) ovvio

$\Rightarrow$) Dobbiamo mostrare che $X \setminus C$ è aperto. Se $x_0 \in X \setminus C$, per la versione geometrica del teorema di Hahn-Banach, esiste $\varphi \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\operatorname{Re} \langle \varphi, x_0 \rangle < \alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle \geq \alpha \quad \forall x \in C$$

Allora $V = \{x \in X \mid \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle < \alpha\}$ è un intorno aperto di x_0 disgiunto da C . $\square$

Corollario Se $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, allora φ è fortemente semicontinua inferiore sse è debolmente semicontinua inferiore.

In particolare, la norma è debolmente s.c.i.

Fatto Se $\dim X = \infty$ e $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$, allora la chiusura deboli $\overline{S}^{\sigma(X, X^*)}$ di S è $\overline{B} = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$.

dim

$\overline{B}$ è debolmente chiuso poiché convessa chiuso $\Rightarrow \overline{S}^{\sigma(X, X^*)} \subset \overline{B}$. Basta mostrare che $\forall x_0 \in \overline{B}$ e $\forall V$ intorno deboli di x_0 , $V \cap S \neq \emptyset$.

Possiamo supporre

$$V = \{x \in X \mid |\langle \varphi_j, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, j = 1, \dots, N\}$$

con $\varphi_j \in X^*$ per $j = 1, \dots, N$ e $\varepsilon > 0$.

$\bigcap_{j=1}^N \text{Ker } \varphi_j \neq \{0\}$ Infatti se tale intersezione fosse zero, l'applicazione lineare

$$X \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x))$$

sarebbe iniettiva ed X avrebbe dimensione $\leq N$

Sia $y \in \bigcap_{j=1}^N \text{Ker } \varphi_j$, $y \neq 0$, e consideriamo la retta affine $x_0 + \mathbb{C}y$

Dato da $x_0 \in \bar{B}$, $(x_0 + \mathbb{C}y) \cap S \neq \emptyset$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \varphi_j(x_0 + \lambda y) = \varphi_j(x_0)$$

$$\Rightarrow x_0 + \mathbb{C}y \subset V \Rightarrow V \cap S \neq \emptyset \quad \Delta$$

- L'argomento sopra mostra che se $\dim X = +\infty$, ogni aperto debole non vuoto è illimitato. Quindi ogni insieme limitato, ad esempio la palla, ha parte interna vuota.

Prop Sia $T: X \rightarrow Y$ lineare tra spazi di Banach

Allora T è continuo rispetto alle topologie forti di X e $Y \Leftrightarrow T$ è continuo rispetto alle topologie deboli di X e Y .

dim

$\Rightarrow$) Occorre mostrare che $\forall \varphi \in Y^*$, il funzionale $\varphi \circ T: X \rightarrow \mathbb{C}$ è continuo rispetto alla topologia debole di X . Ma questo è vero poiché $\varphi \circ T \in X^*$.

$\Leftarrow$) graf T è chiuso in $(X, \sigma(X, X^*)) \times (Y, \sigma(Y, Y^*))$

$\Rightarrow$ la funzione è chiusa in $X \times Y \Rightarrow$

T è continuo (Teorema del grafico chiuso) $\square$

Def