

Funzionale di Minkowski

X spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. $A \subset X$ si dice
assorbente se $\bigcup_{t>0} tA = X$. Ovviamente ciò implica $0 \in A$.

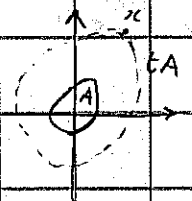
Se A è un intorno di 0 in uno spazio vett. normato

$\Rightarrow A$ è assorbente

Se $A \subset X$ è convessa e assorbente, il suo Funzionale
di Minkowski è

$$\mu_A(x) = \inf \{ t > 0 \mid t^{-1}x \in A \}$$

$$(\quad = \inf \{ t > 0 \mid x \in tA \})$$



A assorbente $\Rightarrow \mu_A < +\infty$

A si dice bilanciato se $\lambda A \subset A$ per ogni $|\lambda| \leq 1$

(nel caso reale, ciò equivale a simmetrico rispetto a 0).

Prop. 1 Se p è una seminorma su X , allora

$B := \{ x \in X \mid p(x) \leq 1 \}$ è convessa, bilanciato,
 assorbente e $p = \mu_B$.

dim

• $p(tx + (1-t)y) \leq p(tx) + p((1-t)y) = tp(x) + (1-t)p(y) < 1$
 se $x, y \in B$ e $t \in [0, 1] \Rightarrow B$ convessa.

• $x \in B \Rightarrow p(\lambda x) = |\lambda| p(x) < 1$ se $|\lambda| \leq 1 \Rightarrow B$ bilanciato.

• $x \in X$ e $s > p(x) \Rightarrow p(s^{-1}x) = s^{-1}p(x) < 1$
 $\Rightarrow B$ è assorbente e $\mu_B(x) \leq s \Rightarrow \mu_B(x) \leq p(x)$

Se $0 < t \leq p(x) \Rightarrow p(t^{-1}x) \geq 1 \Rightarrow t^{-1}x \notin B$

$\Rightarrow \mu_B(x) \geq p(x)$ □

• $A \subset B \Rightarrow \mu_A \geq \mu_B$

• Se B_n è la palla aperta di raggio n relativa
 ad una norma $\|\cdot\|$, $\mu_{B_n}(x) = \frac{\|x\|}{n}$

Prop 2 $A \subset X$ convexo absorbente. Allora:

- a) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$;
- b) $\mu_A(tx) = t \mu_A(x) \quad \forall t \geq 0$;
- c) se A è bilanciato, μ_A è una seminorma;
- d) se $B = \{x \mid \mu_A(x) \leq 1\}$ e $C = \{x \mid \mu_A(x) \leq 1\}$,
allora $B \subset A \subset C$ e $\mu_A = \mu_B = \mu_C$

dim

$$t := \mu_A(x) + \varepsilon, \quad s := \mu_A(y) + \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon > 0 \Rightarrow t^{-1}x \in A$$

e $s^{-1}y \in A$. Per convettività

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \frac{y}{s} \in A \Rightarrow \mu_A(x+y) \leq s+t$$

$$= \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$ a) -

b) e c) ovvio -

d) $B \subset A \subset C$ ovvio $\Rightarrow \mu_B \geq \mu_A \geq \mu_C$

Sia $x \in X$ e $s, t \in \mathbb{R}$ t.c. $\mu_C(x) < s < t$

$$\text{Quindi } \frac{x}{s} \in C \Rightarrow \mu_A\left(\frac{x}{s}\right) \leq 1 \Rightarrow \mu_A\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{s}{t} \mu_A\left(\frac{x}{s}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{t} \in B \Rightarrow \mu_B(x) \leq t. \quad \text{Al limite per } t \downarrow \mu_C(x)$$

$$\text{troviamo } \mu_B(x) \leq \mu_C(x). \quad \text{Dunque } \mu_B = \mu_A = \mu_C. \quad \square$$

Forme geometriche del teorema di Hahn-Banach

Teorema X spazio vettoriale reale normato, $A, B \subset X$ convessi non vuoti disgiunti.

a) Se A è aperto, $\exists \varphi \in X^*$ e $d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi(x) \leq d \leq \varphi(y) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B$$

b) Se A è chiuso e B è compatto, $\exists \varphi \in X^*$ e $d, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi(x) \leq d < \beta < \varphi(y) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B$$

Oss. 1 Più in generale, a) vale se X è uno spazio vettoriale topologico e b) vale se in più X è localmente convesso.

Oss. 2 Se X è complesso, valgono gli stessi enunciati dove φ è rimpiazzata da $\operatorname{Re} \varphi$ nelle disuguaglianze.

dim

a) Facciamo $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, $x_0 := b_0 - a_0$. Allora

$$C := A - B + x_0 = \bigcup_{b \in B} (A - b + x_0) \text{ è un aperto,}$$

convesso che contiene 0. In particolare C è esposto

e sic μ_C il suo funzionale di Minkowski.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow x_0 \notin C \Rightarrow \mu_C(x_0) > 1$$

Definiamo il funzionale lineare $\varphi: \mathbb{R}x_0 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(tx_0) := t. \text{ Allora per } t \geq 0$$

$$\varphi(tx_0) = t \leq t\mu_C(x_0) = \mu_C(tx_0)$$

$$\text{e per } t < 0, \quad \varphi(tx_0) = t < 0 \leq \mu_C(tx_0)$$

Per Hahn-Banach, esiste $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare che estende φ e tale che $\psi(x) \leq \mu_C(x) \quad \forall x \in X$.

Dato che C è aperto, $\exists r > 0$ t.c. $B_r(0) \subset C$.

$$\Rightarrow \mu_C(x) \leq \mu_{B_n(x_0)}(x) = \frac{\|x\|}{n} \quad \text{Per } x_0$$

$$\psi(x) \leq \mu_C(x) \leq \frac{\|x\|}{n}$$

$$\psi(x) = -\psi(-x) \Rightarrow -\mu_C(x) \geq -\frac{\|x\|}{n}$$

implicano che ψ è continua

Se $a \in A$, $b \in B$,

$$\varphi(a) - \varphi(b) + 1 = \varphi(a - b + x_0) \leq \mu_C(a - b + x_0) \leq 1$$

poiché $a - b + x_0 \in C$ e C è aperto.

$$\Rightarrow \varphi(a) < \varphi(b) \quad \forall a \in A, b \in B$$

Le tesi segue dal fatto che $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ è aperto

(ogni funzionale lineare continuo non nullo su uno spazio vettoriale normato è aperto).

(

b) Dato che A è compatto, la funzione 1-lipolitica

$$A \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto \text{dist}(a, B),$$

possiede minimo e dato che B è chiuso, tale minimo

è positivo. Quindi $\exists \epsilon > 0$ tale che $(A + B_\epsilon) \cap B = \emptyset$

Ma $A' := A + B_\epsilon$ è un aperto convesso e per la

parte a), $\exists \varphi \in X^*$ e $\alpha' \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\varphi(a') < \alpha' \leq \varphi(b) \quad \forall a' \in A' \quad \forall b \in B$$

Dato che $\varphi(A')$ è l'immagine del compatto $\varphi(A)$, la tesi segue.

□

Altre conseguenze di Hahn-Banach

- X spazio vettoriale normato, $E \subset X$ sottospazio vettoriale.
Allora E è denso $\Leftrightarrow$ il solo $q \in X^*$ nullo su E è $q=0$.

- C convesso chiuso in uno spazio vettoriale normato X .
Allora C è intersezione di semispazi chiusi.

In effetti, $C = \bigcap$ semispazi chiusi che contengono C .

Basta mostrare che se $x \in X \setminus C$, allora esiste un semispazio chiuso che contiene C ma non x .

Applicando la forma geometrica di HB con il chiuso C e il compatto $\{x\}$, si trova $q \in X^*$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$q(x) < \alpha < \beta < q(y) \quad \forall y \in C$$

Il semispazio $\{y \in X \mid q(y) \geq \beta\}$ soddisfa le condizioni richieste.