

Spazi di Hilbert

E spazio vettoriale complesso (eventualmente di dimensione infinita)

Un prodotto scalare su E è un'applicazione $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ t.c.

- φ bilineare Hermitiana, ossia è lineare nelle prime variabili e coniugatamente lineare nella seconda: $\forall u, v, w \in E$
 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$
 $\varphi(u+v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$, $\varphi(\lambda u, v) = \lambda \varphi(u, v)$
 $\varphi(u, v+w) = \varphi(u, v) + \varphi(u, w)$, $\varphi(u, \lambda v) = \bar{\lambda} \varphi(u, v)$
- φ simmetrica, ossia $\varphi(u, v) = \overline{\varphi(v, u)}$ $\forall u, v \in E$
- φ strettamente positiva $\varphi(u, u) > 0$ $\forall u \in E \setminus \{0\}$

Usiamo la notazione $(u, v) = \varphi(u, v)$.

Es Sia $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ una forma bilineare Hermitiana

e sia $\hat{\varphi}: E \rightarrow \mathbb{C}$, $\hat{\varphi}(u) := \varphi(u, u)$ la forma quadratica associata. Allora $\forall u, v \in E$ risulta

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{4} \hat{\varphi}(u+v) - \frac{1}{4} \hat{\varphi}(u-v) + \frac{i}{4} \hat{\varphi}(u+iv) - \frac{i}{4} \hat{\varphi}(u-iv)$$

Inoltre, φ è simmetrica $\Leftrightarrow \hat{\varphi}$ è reale.

Così accade per le forme bilineari reali?

La forma quadratica associata al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ si indica

con $\|\cdot\|^2$: $\|u\|^2 = (u, u)$. Questa notazione è giustificata

dal fatto che $\|\cdot\|$ è una norma su E , come vedremo

tra poco.

Identità del parallelogramma $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

Teorema di Pitagora Se $u \perp v$ (ovv. $(u, v) = 0$), allora

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Più in generale, se $\{u_1, \dots, u_k\}$ è una famiglia ortogonale finita (ovv. $u_i \perp u_j$ se $i \neq j$) allora

$$\left\| \sum_{j=1}^k u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^k \|u_j\|^2$$

Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una famiglia ortogonale finita (ossia ortogonale: $\|u_j\| = 1 \ \forall j$). I coefficienti di Fourier di u rispetto a tale famiglia sono i numeri complessi (u, u_j) .

Disuguaglianza di Bessel $\sum_{j=1}^k |(u, u_j)|^2 \leq \|u\|^2$
dim

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| u - \sum_{j=1}^k (u, u_j) u_j \right\|^2 = \left(u - \sum_{j=1}^k (u, u_j) u_j, u - \sum_{j=1}^k (u, u_j) u_j \right) \\ &= \|u\|^2 - \sum_{j=1}^k (u, u_j) (u_j, u) - \sum_{j=1}^k \overline{(u, u_j)} (u, u_j) + \\ &\quad + \sum_j \sum_h (u, u_j) \overline{(u, u_h)} (u_j, u_h) = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^k |(u, u_j)|^2. \quad \square \end{aligned}$$

• Val = $\Leftrightarrow u \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_k\}$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$
dim

Banale se $v = 0$. Altrimenti, sia $\hat{v} = v / \|v\|$. Per

Bessel applicata alla famiglia ortogonale $\{\hat{v}\}$,

$$|(u, \hat{v})|^2 \leq \|u\|^2. \quad \text{Ma } |(u, \hat{v})|^2 = \left| \left(u, \frac{v}{\|v\|} \right) \right|^2 = \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2},$$

$$\text{da cui } |(u, v)|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 \quad \square$$

• Val = $\Leftrightarrow u$ e v lin. dep.

Disuguaglianza triangolare $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

dim

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + (u, v) + (v, u) \leq \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2 \quad \square \end{aligned}$$

Dato che $\|\cdot\|$ è anche strettamente positiva ($\|u\| > 0$ se $u \neq 0$) ed omogenea ($\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$), è una norma su E .

Defn Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale H munito di un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ tale che la distanza su H indotta dalla norma associata $\|\cdot\|$ sia completa.

Esempi

(1) $H = \mathbb{C}^m \quad (u, v) = \sum_{j=1}^m u_j \overline{v_j}$

(2) $\ell^2 = \{ u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_j |u(j)|^2 < +\infty \}$ con il prodotto scalare $(u, v) = \sum_j u(j) \overline{v(j)}$.

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_j u(j) \overline{v(j)} \right| \leq \left(\sum_j |u(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j |v(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

• Verifichiamo la completezza:

(u_m) successione di Cauchy in ℓ^2 . Per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$|u_m(j) - u_n(j)| \leq \|u_m - u_n\|, \text{ quindi } (u_m(j)) \text{ è}$$

una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$. Per la

$$u_m(j) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u(j) \quad \forall j.$$

Fatto La famiglia di successioni $\{\|u_m\|^2\}_{m \in \mathbb{N}}$ è uniformemente sommabile, ossia:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists h \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall m \in \mathbb{N} \sum_{j \geq h} |u_m(j)|^2 < \varepsilon^2$$

Per la proprietà di Cauchy $\exists m_0$ t.c. $\forall m \geq m_0 \quad \|u_m - u_{m_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Dato che la serie $\sum_j |u_m(j)|^2$ converge, per la

$$h \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \sum_{j \geq h} |u_m(j)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \quad \forall m \leq m_0.$$

$$\begin{aligned} \text{Se } m \geq m_0, \left(\sum_{j \geq h} |u_m(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{j \geq h} |u_m(j) - u_{m_0}(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j \geq h} |u_{m_0}(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u_m - u_{m_0}\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\sum_{j \geq h} |u(j)|^2 = \sum_{j \geq h} \lim_m |u_m(j)|^2 \leq \liminf_m \sum_{j \geq h} |u_m(j)|^2 \leq \varepsilon^2$$

quindi $u \in \ell^2$

Infine,
$$\|u_m - u\|^2 = \sum_{j < h} |u_m(j) - u(j)|^2 + \sum_{j \geq h} |u_m(j) - u(j)|^2$$

$$\downarrow \text{ per } m \rightarrow \infty \quad \wedge$$

$$0 \quad 2 \sum_{j \geq h} (|u_m(j)|^2 + |u(j)|^2)$$

$$\wedge$$

$$4 \varepsilon^2$$
Per l'arbitrarietà di ε , $\|u_m - u\| \rightarrow 0$. $\square$

(3) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ spazio di misura. Allora

$$L^2(X, \mathcal{F}, \mu) = \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ misurabile} \mid \int_X |f|^2 d\mu < +\infty \right\} / \text{uguaglianza q.o.}$$

è uno spazio di Hilbert con il prodotto

$$(f, g) = \int_X f \bar{g} d\mu$$

Cauchy-Schwarz:
$$\left| \int_X f \bar{g} d\mu \right| \leq \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

Prop Le funzioni $(\cdot, \cdot)$ e $\|\cdot\|$ sono continue su $H \times H$ e su H , risp.

Teorema Sia $C \subset H$ un convesso chiuso. Allora

esiste unico l'elemento w di minima norma in C . Tale w è caratterizzato da $w \in C$ e $\operatorname{Re}(w, u - w) \geq 0$ $\forall u \in C$. $\{x\}$

dim

Unicità: se $\|w_1\| = \|w_2\| = \inf \{ \|u\| \mid u \in C \}$ con

$w_1, w_2 \in C \Rightarrow \frac{w_1 + w_2}{2} \in C$ e per l'id. del parallelogramma

$$D^2 \leq \left\| \frac{w_1 + w_2}{2} \right\|^2 = 2 \left\| \frac{w_1}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{w_2}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{w_1 - w_2}{2} \right\|^2 = D^2 - \frac{1}{4} \|w_1 - w_2\|^2$$

$$\Rightarrow w_1 = w_2$$

Esistenza

$(u_m) \subset C$ t.c. $\|u_m\| \rightarrow D$. Per l'identità del parallelo.

gramma applicata a $\frac{u_m}{2}$ e $-\frac{u_m}{2}$:

$$\frac{1}{4} \|u_m - u_m\|^2 = \frac{1}{2} \|u_m\|^2 + \frac{1}{2} \|u_m\|^2 - \left\| \frac{u_m + u_m}{2} \right\|^2$$

$$\leq \frac{1}{2} \|u_m\|^2 + \frac{1}{2} \|u_m\|^2 - D^2 \xrightarrow{m, m \rightarrow \infty} 0$$

Perciò la successione (u_n) è di Cauchy $\Rightarrow u_n \rightarrow w \in C$
che realizza il minimo per la continuità della norma. $\square$

Caratterizzazione $w \in C$ ha norma minima $\Rightarrow$ vale (*).

Sia $u \in C \Rightarrow v = w + t(u-w) \in C \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow$

$$\|w\|^2 \leq \|v\|^2 = \|w + t(u-w)\|^2 = \|w\|^2 + t^2 \|u-w\|^2 + 2t \operatorname{Re}(w, u-w) \Rightarrow$$

$$0 \leq t^2 \|u-w\|^2 + 2t \operatorname{Re}(w, u-w) = t \left(t \|u-w\|^2 + 2 \operatorname{Re}(w, u-w) \right)$$

$$\forall t \in [0,1] \Rightarrow \operatorname{Re}(w, u-w) \geq 0.$$

Viceversa, supponiamo che w soddisfi (*). Allora, dato $u \in C$ risulta:

$$\|u\|^2 = \|u-w+w\|^2 = \|u-w\|^2 + \|w\|^2 + 2 \operatorname{Re}(w, u-w) \geq \|w\|^2$$

$\square$

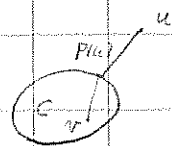
Corollario 1 Sia $C \subset H$ un convesso chiuso. Allora

$\forall u \in H \exists ! P(u) \in C$ che realizza la distanza da C , e cioè

$$\|P(u) - u\| = \operatorname{dist}(u, C) := \inf_{v \in C} \|v - u\|$$

Il punto $P(u)$ è caratterizzato da:

$$(**) \quad P(u) \in C \quad \& \quad \operatorname{Re}(u - P(u), v - P(u)) \leq 0 \quad \forall v \in C$$



L'applicazione $P: H \rightarrow H$ è 1-Lipshitz e verifica $P|_C = \operatorname{id}$,

$$P^2 = P$$

dim

Fino a (**), tutte le regole del Teorema applicate a $C = u$.

Le identità $P|_C = \operatorname{id}$ e $P^2 = P$ sono ovvie. Verifichiamo che

P è 1-Lipshitz: siano u e $v \in H$, per (**).

$$\operatorname{Re}(u - P(u), P(v) - P(u)) \leq 0, \quad \operatorname{Re}(v - P(v), P(u) - P(v)) \leq 0$$

che sommate danno:

$$\operatorname{Re}(P(v) - P(u), u - P(u) + P(v) - v) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\|P(v) - P(u)\|^2 \stackrel{C.S.}{\leq} \operatorname{Re}(P(v) - P(u), v - u) \leq \|P(v) - P(u)\| \|v - u\|$$

$$\Rightarrow \|P(v) - P(u)\| \leq \|v - u\| \quad \square$$

Problema (aperto?) Se $C \subset H$ è chiuso e $\forall u \in H \exists!$ punto di C che realizza $\operatorname{dist}(u, C)$, allora C è convesso.

Corollario 2 $V \subset H$ sottospazio vettoriale chiuso. Allora $\forall u \in H \exists! P(u) \in V$ che realizza $\operatorname{dist}(u, V)$. Inoltre $P(u)$ è caratterizzato da $u - P(u) \perp V$, ossia $(u - P(u), v) = 0 \quad \forall v \in V$. Infine, $P: H \rightarrow H$ è lineare.

dim Verifichiamo che se V è un sottospazio,

$$(**) \quad \operatorname{Re}(u - P(u), v - P(u)) \leq 0 \quad \forall v \in V$$

è equivalente a

$$(***) \quad (u - P(u), v) = 0 \quad \forall v \in V$$

$$(***) \Rightarrow (**) \quad \text{ovvero poiché } v \in V \Rightarrow v - P(u) \in V.$$

$$\text{Assumiamo } (**): \quad \operatorname{Re}(u - P(u), v) = \operatorname{Re}(u - P(u), \underbrace{v + P(u)}_{\in V} - P(u)) \leq 0$$

$$\text{Idem con } -v: \quad \operatorname{Re}(u - P(u), v) \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(u - P(u), v) = 0$$

$$\operatorname{Im}(u - P(u), v) = -\operatorname{Re}(u - P(u), iv) = 0 \quad \Delta$$

$$\underline{P \text{ è lineare}}: \quad u - P(u) \perp V \Rightarrow \lambda u - \lambda P(u) \perp V$$

$$\Rightarrow P(\lambda u) = \lambda P(u)$$

$$\left. \begin{array}{l} u - P(u) \perp V \\ v - P(v) \perp V \end{array} \right\} \Rightarrow u + v - (P(u) + P(v)) \perp V$$

$$\Rightarrow P(u+v) = P(u) + P(v) \quad \square$$

Corollario 3 $V \subset H$ sottospazio vettoriale chiuso $V \neq H$.

Allora $\exists w \in H$ $w \neq 0$ e $w \perp V$.