Analisi Matematica II - Ingegneria Edile
Secondo compitino - 27 Maggio 2010

Tutte le domande

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $(0,0)$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) f è continua su $\mathbb{R}^2$;
   (b) $f(h,h) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h + o(h)$ per $h \to 0$;
   (c) le derivate parziali di f rispetto a x e rispetto a y sono continue in $(0,0)$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $(0,0)$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) f è continua in $(0,0)$;
   (b) $f(h,h) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h + o(h^2)$ per $h \to 0$;
   (c) le derivate parziali di f rispetto ad x e rispetto a y sono continue in $(0,0)$.

3. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, una curva semplice regolare. Quali delle seguenti formule esprime correttamente la lunghezza di $\gamma([a,b])$?
   (a) $\int_a^b \big(x'(t) + y'(t)\big)\, dt$;
   (b) $\int_a^b \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\, dt$;
   (c) $\int_\gamma ds$.

4. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, una curva semplice regolare. Quali delle seguenti formule esprime correttamente la lunghezza di $\gamma([a,b])$?
   (a) $\int_a^b \big(x'(t) + y'(t)\big)\, dt$;
   (b) $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$;
   (c) $\int_\gamma dx$.

5. Siano γ una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) la quantità $\int_\gamma f\, dx$ non dipende né dalla parametrizzazione né dal verso di γ;
   (b) la quantità $\int_\gamma f\, ds$ non dipende dalla parametrizzazione di γ;
   (c) se $\hat\gamma$ indica la curva γ percorsa in direzione opposta, risulta $\int_{\hat\gamma} f\, ds = -\int_\gamma f\, ds$.

6. Siano γ una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) la quantità $\int_\gamma f\, dx$ non dipende né dalla parametrizzazione né dal verso di γ;
   (b) la quantità $\int_\gamma f\, ds$ cambia se si cambia la parametrizzazione di γ;
   (c) se $\hat\gamma$ indica la curva γ percorsa in direzione opposta, risulta $\int_{\hat\gamma} f\, dy = -\int_\gamma f\, dy$.

7. Sia γ una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ con versore tangente $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti formule è corretta?
   (a) $\int_\gamma f\, dx = \int_\gamma f\, ds$;

(b) $\int_\gamma f\,dx = \int_\gamma f\tau_1\,ds$;

(c) $\int_\gamma f\,dx = \int_\gamma f\tau_2\,ds$.

8. Sia γ una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ con versore tangente $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti formule è corretta?

   (a) $\int_\gamma f\,dy = \int_\gamma f\,ds$;

   (b) $\int_\gamma f\,dy = \int_\gamma f\tau_1\,ds$;

   (c) $\int_\gamma f\,dy = \int_\gamma f\tau_2\,ds$.

9. Sia ω una forma differenziale chiusa su $\mathbb{R}^2$ privato del punto $(0,0)$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) ω è esatta sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;

   (b) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (t, 0)$, $1 \le t \le 2$, è nullo;

   (c) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, 2 + \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, è nullo.

10. Sia ω una forma differenziale chiusa su $\mathbb{R}^2$ privato del punto $(0,0)$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) ω è esatta sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$;

    (b) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (t, 0)$, $1 \le t \le 2$, è nullo;

    (c) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, è nullo.

11. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Quali delle seguenti formule per l'area di A è corretta?

    (a) $\int_\gamma \big((x/3)dy - (2y/3)dx\big)$;

    (b) $\int_\gamma ds$;

    (c) $\int_\gamma x\,dx$.

12. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Quali delle seguenti formule per l'area di A è corretta?

    (a) $\int_\gamma \big((x/3)dx - (2y/3)dy\big)$;

    (b) $\int_\gamma ds$;

    (c) $\int_\gamma x\,dy$.

13. Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ un solido la cui densità è descritta da una funzione $\rho(x,y,z)$. Quali delle seguenti formule per la componente y del baricentro di A è corretta?

    (a) $\frac{\iiint_A y\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_A \rho(x,y,z)\,dxdydz}$;

    (b) $\iiint_A \frac{\partial\rho}{\partial y}\,dxdydz$;

    (c) $\iiint_A y\rho(x,y,z)\,dxdydz$.

14. Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ un solido di massa 1 la cui densità è descritta da una funzione $\rho(x,y,z)$. Quali delle seguenti formule per la componente x del baricentro di A è corretta?

    (a) $\frac{\iiint_A \rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_A x\rho(x,y,z)\,dxdydz}$;

(b) $\iiint_A \frac{\partial\rho}{\partial x}\, dxdydz$;

(c) $\iiint_A x\rho(x,y,z)\, dxdydz$.

15. Sia $f(x,y) = xy$ e sia D il quarto del disco di raggio 1 e centro $(0,0)$ che si trova nel primo quadrante. Quale delle seguenti formule è corretta?

    (a) $\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 d\theta \int_0^{\pi/2} r^2 \sin\theta\cos\theta\, dr$;

    (b) $\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^3 \sin\theta\cos\theta\, dr$;

    (c) $\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2 \sin\theta\cos\theta\, dr$.

16. Sia $f(x,y) = xy$ e sia D il quarto del disco di raggio 2 e centro $(0,0)$ che si trova nel primo quadrante. Quale delle seguenti formule è corretta?

    (a) $\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^2 d\theta \int_0^{\pi/2} r^2 \sin\theta\cos\theta\, dr$;

    (b) $\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 r^2 \sin\theta\cos\theta\, dr$;

    (c) $\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 r^3 \sin\theta\cos\theta\, dr$.

17. Sia f una funzione continua sul dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia
$$M = \iint_D f(x,y)\, dxdy.$$
Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) la quantità M è compresa tra il massimo e il minimo di f su D;

    (b) la quantità M non è più grande del massimo di f moltiplicato per l'area di D;

    (c) la quantità M coincide con l'area di D.

18. Sia f una funzione continua sul dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia
$$M = \iint_D f(x,y)\, dxdy.$$
Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) la quantità $M/\mathrm{Area}\,(D)$ è compresa tra il minimo e il massimo di f su D;

    (b) la quantità M non è più grande del massimo di f.

    (c) la quantità M coincide con l'area di D.

19. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = c\}$. Se supponiamo che $(x,y,z) \in F$ e $\nabla f(x,y,z) \neq 0$, quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) $\nabla f(x,y,z)$ è tangente alla superficie F nel punto (x,y,z);

    (b) $\nabla f(x,y,z)$ è ortogonale alla superficie F nel punto (x,y,z);

    (c) $\nabla f(x,y,z)$ è ortogonale alla curva F nel punto (x,y,z).

20. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$. Se supponiamo che $(x,y) \in F$ e $\nabla f(x,y) \neq 0$, quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) $\nabla f(x,y)$ è tangente alla superficie F nel punto (x,y);

    (b) $\nabla f(x,y)$ è ortogonale alla superficie F nel punto (x,y);

    (c) $\nabla f(x,y)$ è ortogonale alla curva F nel punto (x,y).

Risposte: 1b, 2a, 3c, 4b, 5b, 6c, 7b, 8c, 9c, 10a, 11a, 12c, 13a, 14c, 15b, 16c, 17b, 18a, 19b, 20c.

Tutti i problemi

A. Sia ω la forma differenziale su $\mathbb{R}^2$

$$\omega(x,y) = \big(xy\sin(xy) - \cos(xy)\big)dx + x^2\sin(xy)dy.$$

(a) Dimostrare che ω è esatta.

(b) Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$F(x,y) = \big(xy\sin(xy) - \cos(xy), x^2\sin(xy)\big)$$

sulle due curve

$$\alpha(t) = (2\cos t, 3\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\beta(t) = \Big(\sqrt{\pi} - \sin t, \frac{t}{\sqrt{\pi} - \sin t}\Big), \quad \pi \le t \le 2\pi.$$

B. Sia ω la forma differenziale su $\mathbb{R}^2$

$$\omega(x,y) = y^2\cos(xy)dx + \big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\big)dy.$$

(a) Dimostrare che ω è esatta.

(b) Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$F(x,y) = \big(y^2\cos(xy), \sin(xy) + xy\cos(xy)\big)$$

sulle due curve

$$\alpha(t) = (3\cos t, 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\beta(t) = \Big(\frac{t}{\sqrt{\pi} + \sin t}, \sqrt{\pi} + \sin t\Big), \quad \pi \le t \le 2\pi.$$

C. Siano a e b numeri positivi. Sia D la porzione di piano delimitata dalla curva chiusa di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Calcolare

$$\iint_D |x|\, dxdy.$$

D. Siano a e b numeri positivi. Sia D la porzione di piano delimitata dalla curva chiusa di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Calcolare

$$\iint_D |y|\, dxdy.$$