

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - Programma dettagliato

Alberto Abbondandolo

Gli argomenti in **grassetto** sono quelli di cui occorre conoscere nei dettagli le dimostrazioni.

COMBINATORIA ELEMENTARE. Cardinalità di unioni, prodotti cartesiani, funzioni tra insiemi, funzioni iniettive, parti di un insieme. Coefficienti binomiali e formule relative.

SERIE DI POTENZE FORMALI. Definizione. Somma e prodotto. **Una serie formale A possiede reciproco se e solamente se $[x^0]A \neq 0$.** La serie geometrica. Derivazione di una serie di potenze formale e sue proprietà. Composizione di serie di potenze formali. La serie $(1+x)^\alpha$ ed i coefficienti binomiali generalizzati. Formula di inversione di Lagrange.

FUNZIONI GENERATRICI ORDINARIE. La OGF della successione di Fibonacci. **Partizioni di un insieme, numeri di Stirling di secondo tipo e numeri di Bell.** Dizionario delle OGF: (1) **traslazione di una successione**, (2) **moltiplicazione per un polinomio $P(n)$** , (3) **prodotto alla Cauchy**, (4) **elevare una serie di potenze alla k** , (5) **somme parziali**, (6) **sottosuccessioni corrispondenti ad una progressione aritmetica**. **Composizioni (ossia partizioni ordinate) di un intero.** **Stringhe legali di parentesi e numeri di Catalano.** Numeri armonici.

FUNZIONI GENERATRICI ESPONENZIALI. Dizionario delle EGF: (1) **traslazione di una successione**, (2) **moltiplicazione per un polinomio $P(n)$** , (3) **prodotto di due EGF**. **Permutazioni senza punti fissi.**

CLASSI COMBINATORIE ORDINARIE. Definizione, classe neutra, classe atomica. **Somma e prodotto.** **La classe sequenza.** Stringhe di simboli. **OGF della classe delle parole dove non compaiono sottostringhe di k o più ripetizioni di una data lettera.** Le operazioni PSET e MSET e le loro OGF. **Partizioni di un numero naturale e problema del cambio.** **Teorema di Eulero: le partizioni di n in addendi distinti sono tante quante le partizioni di n in addendi dispari.** Grafi ed alberi. Alberi piantati e non, etichettati e non, planari e non. **OGF degli alberi planari non etichettati.** Formule ricorsive per alberi non etichettati non planari.

CLASSI COMBINATORIE ESPONENZIALI. Definizione, classe neutra, classe atomica. Somma e prodotto. **La classe sequenza.** **La classe SET e la sua EGF.** **Il numero della funzioni surgettive.** Partizioni di un insieme in k sottoinsiemi. Grafi etichettati. **Numero degli alberi etichettati.** **La classe Ciclo e la sua EGF.** Permutazioni e lunghezza dei cicli. **Numero medio dei cicli di una permutazione.** Lunghezza media del ciclo più lungo.

ANALISI COMPLESSA. **Formula del raggio di convergenza di una serie di potenze.** Raggio di convergenza di somme, prodotti, reciproci, composizioni, inverse composizionali, derivate. La funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche. Il logaritmo complesso e la sua determinazione principale. Funzioni analitiche. Teorema: una serie di potenze è analitica sul disco

di convergenza. Principio di continuazione analitica. *Zeri di funzioni analitiche. Poli di funzioni analitiche e funzioni meromorfe.* Forme differenziali nel piano. Forme chiuse e forme esatte. **Esatta implica chiusa.** Integrazione di forme su cammini. **L'integrale di una forma esatta. La forma dz/z è chiusa ma non è esatta sul piano meno l'origine. Una forma differenziale è esatta se e solamente se il suo integrale su ogni cammino chiuso si annulla.** Omotopie di cammini. Le forme chiuse su domini semplicemente connessi sono esatte. Funzioni olomorfe. **Una funzione f è derivabile in senso complesso se e solamente se soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann se e solamente se la forma $f(z)dz$ è chiusa. Formula di Cauchy. Se f è olomorfa allora è analitica.** Formula di Cauchy per le derivate di f . Dimostrazione della formula di inversione di Lagrange. Residuo di una funzione meromorfa in un polo. **Teorema dei residui. Numero di zeri e di poli di una funzione meromorfa.** Teorema di Rouché. La funzione Γ e le sue proprietà. Formula di Stirling.

SVILUPPI ASINTOTICI. Stime asintotiche dei coefficienti di una serie di potenze che definisce una funzione meromorfa. Permutazioni senza cicli corti. Numero delle funzioni surgettive. **Il teorema di Shur: stima asintotica sul numero di modi di pagare n con monete di taglio a_1, \dots, a_k (numeri naturali con MCD 1).** Grafi etichettati in cui ogni nodo ha grado 2. Singolarità algebriche. Il teorema di Darboux sullo sviluppo asintotico dei coefficienti di una serie di potenze che definisce una funzione con una singolarità algebrica. **Alberi unari-binari.** Ripetizioni lunghe di una lettera in parole random.

Testi consigliati

- Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press 1990.
- Philippe Flajolet, Robert Sedgewick, *Analytic combinatorics*, 2007.
<http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/books.html>
- Henri Cartan, "Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables".