Complementi di Analisi Matematica

Primo Compito - 26 Giugno 2008

Problema 1. Determinare in forma chiusa la successione (a_n) definita ricorsivamente da

$$a_0 = 1, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, a_k \quad \forall n \geq 1.$$

Problema 2. Chiamiamo una permutazione σ di $\{1, \dots, n\}$ *oscillante* se

$$\sigma(1) < \sigma(2), \quad \sigma(2) > \sigma(3), \quad \sigma(3) < \sigma(4), \quad \sigma(4) > \sigma(5), \quad \dots$$

Ci proponiamo di studiare il numero w_n delle permutazioni oscillanti di $\{1, \dots, n\}$.

1. Dimostrare le formule ricorsive

$$w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} w_{2k} w_{2n-2k}, \quad \forall n \geq 0,$$
$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} w_{2k} w_{2n-2k-1}, \quad \forall n \geq 1,$$

   ove si è posto $w_0 = 1$.

2. Si introducano le funzioni generatrici esponenziali:

$$W(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{w_n}{n!} x^n, \quad W_p(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{w_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad W_d(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{w_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

   Dimostrare che

$$W_d'(x) = W_p(x)^2, \quad W_p'(x) = W_p(x) W_d(x), \quad [x^0] W_p = 1, \quad [x^0] W_d = 0. \tag{1}$$

3. Mostrare che esiste un'unica coppia di serie formali (W_p, W_d) che risolve (1).

4. Verificare che

$$W(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

5. Dimostrare che la successione $(w_n/n!)$ è infinitesima.

6. Dimostrare che vale lo sviluppo asintotico

$$\frac{w_n}{n!} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} \right)^n + O(\theta^n),$$

   dove θ è una qualunque costante maggiore di $2/(3\pi)$.