Complementi di Analisi Matematica
Secondo Compitino - 3 Giugno 2008

Problema. La *distanza* tra due nodi in un grafo è il minimo numero di lati che occorre attraversare per congiungerli. L'*altezza* di un albero è la massima distanza tra un nodo e la radice (quindi un albero composto dalla sola radice ha altezza zero). Dato $h \in \mathbb{N}$ ci proponiamo di studiare il numero f_n^h di *alberi planari non etichettati di altezza minore o uguale a h con $n+1$ nodi* (equivalentemente, con n lati). Sia $F_h(x)$ la relativa funzione generatrice ordinaria:

$$F_h(x) = \sum_{n \geq 0} f_n^h x^n.$$

1. Dimostrare che vale la formula ricorsiva:
$$F_h(x) = \frac{1}{1 - xF_{h-1}(x)}, \quad F_0(x) = 1.$$

2. Determinare esplicitamente f_n^h per $h = 2$.

3. Nel caso $h = 3$ dimostrare che
$$f_n^3 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + o(2^{-n}) \quad \text{per } n \to \infty.$$

4. Determinare un analogo sviluppo asintotico per $h = 4$.

5. Dimostrare che $F_h(x)$ è una funzione razionale della forma
$$F_h(x) = \frac{p_h(x)}{p_{h+1}(x)},$$
dove p_h è la successione di polinomi definita da
$$p_{h+1}(x) = p_h(x) - x\, p_{h-1}(x), \quad p_0(x) = p_1(x) = 1.$$

6. [Facoltativo] Sia u_h la successione di *polinomi di Chebichev di secondo tipo*, definita ricorsivamente da
$$u_{h+1}(x) = 2x\, u_h(x) - u_{h-1}(x), \quad u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = 2x.$$
Dimostrare che u_h è un polinomio di grado h, che vale l'identità
$$u_h(\cos\theta) = \frac{\sin((h+1)\theta)}{\sin\theta},$$
e che le radici di u_h sono
$$\cos\left(\frac{j}{h+1}\pi\right), \quad j = 1, \dots, h.$$

7. Dimostrare che vale l'identità
$$u_h(x) = (2x)^h p_h\left(\frac{1}{4x^2}\right).$$

8. Fissato h, determinare uno sviluppo asintotico per f_n^h per $n \to \infty$.