1 Questioni relative alla cardinalità di insiemi finiti.

Consideriamo uno o più insiemi finiti $X, Y, ...$ Il linguaggio della teoria degli insiemi permette di definire alcuni insiemi derivati $X \cup Y,\ \ X \times Y,\ \ X^Y, ...$, via via più complicati: per ciascuno di essi si pone il problema di sapere se sia finito, e quale sia la sua cardinalità.

Formula della somma. Se $X,\ Y$ sono insiemi finiti e *disgiunti* si ha

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|. \tag{1}$$

Più in generale, se $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ sono insiemi finiti e *disgiunti*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} X_i| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|. \tag{2}$$

Un caso particolare interessante è la

Formula delle fibre. Se $\varphi : X \to Y$ è un'applicazione fra due insiemi finiti si ha [1]

$$|X| = \sum_{y \in Y} |\varphi^{-1}(y)|. \tag{3}$$

Formula del prodotto. Se $X,\ Y$ sono insiemi finiti anche $X \times Y$ lo è e si ha che

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|. \tag{4}$$

Più in generale

$$|\prod_{i=1}^{n} X_i| = \prod_{i=1}^{n} |X_i| \tag{5}$$

Dimostrazione. Considerare la proiezione $p : X \times Y \to X$ ed applicare (3). La (5) deriva da (4) procedendo per induzione su n.$\square$

Formula delle parti. Si denota con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X (compresi $\emptyset$ ed X stesso). Se X è finito anche $\mathcal{P}(X)$ lo è e

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|} \tag{6}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la formula per induzione sulla cardinalità n di X. Se $n = 0$ si ha $X = \emptyset$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ e $|\mathcal{P}(X)| = 1 = 2^0$. Supponiamo vera la formula (6) per $|X| = n$ e proviamola nel caso $|X| = n + 1$. Fissiamo un elemento $x \in X$. Allora $\mathcal{P}(X)$ è unione disgiunta :

$$\mathcal{P}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X)\ :\ x \notin A\} \cup \{A \in \mathcal{P}(X)\ :\ x \in A\} \tag{7}$$

Il primo dei due insiemi è $\mathcal{P}(X \setminus \{x\})$, e per ipotesi induttiva ha cardinalità 2^n. Il secondo insieme è messo in bigezione con il primo tramite l'applicazione $A \mapsto A \setminus \{x\}$, quindi ha pure cardinalità 2^n e per la formula (1)

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = 2^{|X|}. \tag{8}$$

$\square$

[1] Si ricordi che $\varphi^{-1}(y)$ denota la "fibra" o "controimmagine" dell'elemento y di Y, e che X è unione disgiunta delle fibre.

Formula dell'esponenziazione. Denotiamo con Y^X l'insieme di tutte le applicazioni $\xi : X \to Y$. Se X ed Y sono finiti si ha:

$$|Y^X| = |Y|^{|X|}. \tag{9}$$

Dimostrazione. Possiamo pensare che X sia l'insieme $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$. Una applicazione $\xi : X \to Y$ è allora la stessa cosa che una n-upla ordinata di elementi di Y, e quindi $X = \prod_{i=1}^n Y_i$ con $Y_i = Y$ per ogni i. La formula (9) è dunque un caso particolare della (4).

Osservazione. Se $X = \mathbf{2} := \{0,\ 1\}$, confrontando la (6) e la (9) troviamo che gli insiemi $\mathbf{2}^Y$ e $\mathcal{P}(Y)$ hanno la stessa cardinalità. In effetti si può sempre definire tra questi insiemi una bigezione, anche nel caso in cui Y non sia finito: per esempio l'applicazione

$$\mathbf{2}^Y \ni \varphi \mapsto \varphi^{-1}(1) \in \mathcal{P}(Y)$$

la cui inversa è

$$\mathcal{P}(X) \ni A \mapsto \chi_A \in \mathbf{2}^Y,$$

dove χ_A è la *funzione caratteristica* dell'insieme A, definita ponendo

$$\chi_A := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Stante questa bigezione , spesso si usa la notazione $\mathbf{2}^X$ in luogo di $\mathcal{P}(X)$.

Osservazione. Le formule (4) e (9) danno ragione della scelta del nome e della notazione per $X \times Y$ e Y^X. Una ulteriore motivazione è fornita qui sotto.

Esercizio 1. *Dati tre insiemi $X, Y,\ Z$ si costruisca una bigezione fra $(X \times Y)^Z$ e $X^Z \times Y^Z$ e una bigezione fra $(X^Y)^Z$ e $X^{Y \times Z}$.*

Esercizio 2. *L'insieme delle parti, un insieme di funzioni o anche un prodotto di insiemi possono essere utili insiemi di indici in una sommatoria. Si provino le formule*[2]

$$\prod_{i=1}^n (A_i + B_i) = \sum_{C \in I} C_1 \cdot ... \cdot C_n, \qquad I = \prod_{i=1}^n \{A_i,\ B_i\}. \tag{10}$$

$$\prod_{i=1}^n (A_i + B_i) = \sum_{F \in I} \big(\prod_{i \in F} A_i\big) \cdot \big(\prod_{i \notin F} B_i\big) \qquad I = \mathcal{P}(\{1, ..., n\}). \tag{11}$$

Applicazioni Iniettive e Permutazioni. Denotiamo con $\mathrm{Inj}(X, Y)$ il sottoinsieme di Y^X costituito dalle applicazioni iniettive di X in Y. Se X e Y sono finiti con $|X| \leq |Y|$ si ha

$$|\mathrm{Inj}(X, Y)| = \frac{|Y|!}{(|Y| - |X|)!}. \tag{12}$$

In particolare, se $Y = X$ le biiezioni di X in sè (*permutazioni*) sono $|X|!$.

[2]Si noti che nella dimostrazione della prima formula non è necessario fare uso della proprietà commutativa; quindi questa formula può essere applicata al caso in cui A_i, B_i sono elementi di un anello non commutativo (per esempio, A_i e B_i potrebbero essere matrici).

Dimostrazione. Fissiamo un elemento $x \in X$ e consideriamo la *restrizione* ad $X \setminus \{x\}$ come applicazione

$$\rho : \mathrm{Inj}(X, Y) \to \mathrm{Inj}(X \setminus \{x\}, Y)$$

definita da $\rho(f) := f_{|X\setminus\{x\}}$. Se $g \in \mathrm{Inj}(X \setminus \{x\}, Y)$, la fibra di g, $\rho^{-1}(g) \subset \mathrm{Inj}(X, Y)$, è dunque l'insieme di tutte le estensioni iniettive di g ad X: essa ha cardinalità costante uguale a $|Y|-|X|+1$. Infatti l'applicazione $\rho^{-1}(g) \ni f \mapsto f(x) \in Y \setminus g(X)$ è bigettiva e $|Y \setminus g(X \setminus \{x\})| = |Y| - |g(X \setminus \{x\})| = |Y| - |X| + 1$. Dalla formula (3) abbiamo

$$|\mathrm{Inj}(X, Y)| = (|Y| - |X|) \cdot |\mathrm{Inj}(X \setminus \{x\}, Y)|$$

che iterata dà la (12).□

Formula dei k-sottoinsiemi Se $|X| = n$ e $0 \le k \le n$ possiamo considerare la famiglia dei k-sottoinsiemi di X

$$\mathcal{P}_k(X) := \{a \subset X \mid |A| = k\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

La cardinalità di $\mathcal{P}_k(X)$ si indica col simbolo $\binom{n}{k}$; si ha allora

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{13}$$

Dimostrazione. Sia $Y := \{1, 2...k\}$; si consideri la mappa "immagine":

$$I : \mathrm{Inj}(X, Y) \to \mathcal{P}(X), \qquad f \mapsto f(X).$$

Se $A \in calP_k(X)$, la fibra di A è $I^{-1}(A) = \mathrm{Inj}(Y, A)$ con cardinalità costante $k!$ e si ha dunque

$$\frac{n!}{(n-k)!} = |\mathrm{Inj}(X, Y)| = k!|\mathcal{P}_k(X)| = k!\binom{n}{k},$$

da cui segue la (13) dividendo per $k!$. □

Osservazione: se $n \ge 0$ e $k \in Z$ si pone $\binom{n}{k} = 0$ se $k < 0$ o se $k > n$.

Esercizio 3. *Sia $|X| = n$. Provare le seguenti identità in due modi: sia usando la formula* (13), *sia dandone una interpretazione combinatoria (cioè costruendo le bigezioni opportune)*

(i) $|\mathcal{P}_k(X)| = |\mathcal{P}_{n-k}(X)|$.

(ii) $|\mathcal{P}_k(X \cup \{x\})| = |\mathcal{P}_k(X)| + |\mathcal{P}_{k-1}(X)|$, $(x \notin X)$

(iii) $(k+1)|\mathcal{P}_{(k+1)}(X)| = (n-k)|\mathcal{P}_k(X)|$

(iv) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ $(n \ge 1)$ *e* $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ $(n \ge 2)$.

Esercizio 4. *Mostrare che* $\binom{n}{[n/2]} \ge \binom{n}{k}$ $\forall k$.

Esercizio 5. *Si definisca, per* $|X| = n \ge k \ge r \ge 0$

$$\mathcal{P}_{k,r}(X) := \{(A, B) \mid A \subset B \subset X;\ |A| = r,\ |B| = k\}$$

e si provi che $|\mathcal{P}_{k,r}(X)| = \binom{n}{k}\binom{k}{r}$. *Si verifichi che, se* $k + k' = n + r$, $\mathcal{P}_{k,r}$ *e* $\mathcal{P}_{k',r}$ *hanno la stessa cardinalità. Quale può essere una bigezione tra questi due insiemi?*

I numeri $\binom{n}{k}$ si chiamano *coefficenti binomiali*: ecco il perchè:

Formula del binomio: In ogni anello commutativo si ha

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \tag{14}$$

Dimostrazione. Sviluppiamo il prodotto $(A+B)...(A+B)$ usando la seconda formula dell'esercizio 2. Raccogliendo i termini $A^k B^{n-k}$, che sono in numero di $\mathcal{P}_k(X) = \binom{n}{k}$, si trova subito la (14).

Esercizio 6. *Provare in due modi l'identità*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Osservazione. È facile rendersi conto che i numeri $\binom{n}{k}$ sono determinati dalle relazioni seguenti (di cui la prima è ovvia mentre la seconda segue dall' esercizio 3)

$$\begin{array}{llll} (i) & \binom{0}{k} & = \delta_{0,k} := \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 1 & k \neq 0. \end{cases} & \\ (ii) & \binom{n+1}{k} & = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} & n \geq 0,\ k \in Z. \end{array} \tag{15}$$

Il calcolo di $\binom{n}{k}$ usando le (15) comporta la costruzione del "triangolo di Pascal" o "triangolo di Tartaglia":

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Osservazione. Poiché le relazioni (15) si possono ricavare anche senza usare la formula (13), ha senso chiedersi come questa si possa far seguire da quelle. Prendiamo le relazioni (15) come definizione dei numeri $\binom{n}{k}$; ignorando (o fingendo di ignorare) la formula (14) possiamo definire dei polinomi

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Le relazioni (15) si traducono allora nella seguente legge di ricorrenza:

$$p_0(x) = 1; \quad p_{n+1}(x) = (1+x)p_n(x)$$

da cui segue che $p_n(x) = (1+x)^n$. Il fatto notevole qui è che la formula del binomio

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k \tag{16}$$

si può anche dimostrare indipendentemente con il calcolo differenziale usando lo "sviluppo di Taylor". Confrontando i coefficienti nei due sviluppi di $(1+x)^n$ concludiamo che $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Può sembrare una bizzarria calcolare i coefficenti binomiali in questo modo. Cionondimeno dovrebbe rimanere il sospetto che il metodo si possa applicare proficuamente a casi più difficili che il calcolo dei coefficenti binomiali, dove non sia disponibile una dimostrazione combinatoria semplice.

Esercizio 7. *Si consideri l'insieme delle parole composte dalle lettere prese da un alfabeto* $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\}$*, e dove la lettera* A_i *compare* k_i *volte (con* $k_i \in N$*,* $\sum_1^n k_i = n$*). Si provi che la cardinalità di questo insieme è*

$$\frac{n!}{k_1!k_2!...k_r!} \tag{17}$$

Questo numero si indica anche con $\binom{n}{k_1...k_r}$ o più brevemente $\binom{n}{\mathbf{k}}$ dove $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_r)$. Se $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_r) \in R^r$ si pone anche

$$\mathbf{A}^{\mathbf{k}} = \prod_{i=1}^{r} {A_i}^{k_i} \quad \text{e} \quad |\mathbf{k}| = \sum_1^n k_i = n.$$

Usando queste notazioni si provi che vale lo sviluppo:

$$(\sum_{i=1}^{r} A_i)^n = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r \\ |\mathbf{k}| = n}} \binom{n}{\mathbf{k}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}}. \tag{18}$$

La formula (1) ammette una notevole generalizzazione al caso di unioni non disgiunte.

Formula di Inclusione–Esclusione. Siano $X_1, X_2, ..., X_n$ insiemi finiti e sia $I = \{1, ..., n\}$. Allora vale la formula

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \subset I} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{i \in J} X_i \right|, \tag{19}$$

o in forma più estesa

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{0 \leq i \leq n} |X_i| - \sum_{0 \leq i < j \leq n} |X_i \cap X_j| + \sum_{0 \leq i < j < k \leq n} |X_i \cap X_j \cap X_k| - ... - (-1)^n \left| \bigcap_{i=1}^{n} X_i \right|.$$

Dimostrazione. Proviamo la formula per induzione su n. Se $n = 1$ non c'è nulla da provare. Se $n = 2$ si scrive:

$$X_1 \cup X_2 = X_1 \cup (X_2 \setminus X_1)$$

e

$$X_2 = (X_2 \setminus X_1) \cup (X_1 \cap X_2),$$

entrambe unioni disgiunte. Si applica la formula (1) e si elimina il termine $|X_2 \setminus X_1|$ ottenendo

$$|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|, \tag{20}$$

che è la formula nel caso $n = 2$. Supponiamo vera la formula per $n \geq 2$ e proviamola per $n + 1$. Si ha, in virtù della formula (19)

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \cup X_{n+1} \right| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| + |X_{n+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i \right) \cap X_{n+1} \right|.$$

Applicando la formula (19) a $\bigcup_{i=1}^n X_i$ ed a $(\bigcup_{i=1}^n X_i) \cap X_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n (X_i \cap X_{n+1})$ si deriva la (19) nel caso $n + 1$.

Esercizio 8. *Siano $X_1, ..., X_n$ insiemi finiti e $X = \cup_{i=1}^{n} X_i$. Provare l'identità*

$$1 - \chi_X = \prod_{i=1}^{n} (1 - \chi_{X_i}).$$

Sviluppando il prodotto al secondo membro dedurre per altra via la formula (19) *(si osservi che se $A \subset X$ si ha $|A| = \sum_{x \in X} \chi_A(x)$).*

Esercizio 9. *(Funzione ϕ di Eulero.) Indichiamo con $\phi(n)$ la cardinalità dell'insieme dei naturali minori di n e relativamente primi con n (cioè i $k \leq n$ tali che $\operatorname{mcd}(k, n) = 1$). Si mostri che allora*

$$\phi(n) = n \prod_{p \leq n,\ p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Esercizio 10. *(Famiglie di insiemi con regolarità di intersezione.) Sia $\{E_i, i \in I\}$ una famiglia di insiemi finiti con la proprietà che la cardinalità dell'intersezione di k di essi è una costante $c(k)$ dipendente solo dal numero k , cioè, per ogni $J \subset I$ si ha $|\bigcap_{i \in J} E_i| = c(|J|)$. Si provi che allora la formula* (19) *diviene:*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} E_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} c(k). \tag{21}$$

Formula delle Surgezioni. Denotiamo con $\operatorname{Sur}(X, Y)$ il sottoinsieme di Y^X costituito dalle applicazioni surgettive di X in Y. Se X e Y sono finiti con $|X| = r \geq |Y| = n$ si ha

$$|\operatorname{Sur}(X, Y)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^r. \tag{22}$$

Dimostrazione. Una applicazione non surgettiva $X \to Y$ è, per qualche $y \in Y$, un'applicazione $X \to Y \setminus \{y\}$. Perciò

$$Y^X \setminus \operatorname{Sur}(X, Y) = \bigcup_{y \in Y} (Y \setminus \{y\})^X \tag{23}$$

Si noti che la famiglia di insiemi $E_y := (Y \setminus \{y\})^X$ ha la proprietà di regolarità di intersezione descritta nell'esercizio 10: infatti, per ogni k-sottoinsieme A di Y si ha

$$\bigcap_{y \in A} E_y = (Y \setminus A)^X$$

dunque

$$\left| \bigcap_{y \in A} E_y \right| = (|Y| - |A|)^{|X|} = (n - k)^r.$$

Per la formula (21) dell'esercizio 10

$$\left| \bigcup_{y \in Y} E_y \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)^r = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} k^r,$$

e dalla (23) concludiamo

$$|\operatorname{Sur}(X, Y)| = n^r - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} k^r = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^r.$$

Esercizio 11. *(Permutazioni senza punti fissi). Sia S_n l'insieme delle $n!$ prmutazioni dell'insieme $\{1, 2...n\}$, e sia D_n il sottoinsieme delle permutazioni senza punti fissi:*

$$D_n := \{\sigma \in S_n \ : \ \forall 1 \le i \le n \sigma(i) \neq i\}.$$

Si provi la formula:

$$|D_n| = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

(Si scriva $S_n \setminus D_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$ con $E_i := \{\sigma \in S_n \quad : \quad \sigma(i) = i\}$; si verifichi la proprietà di regolarità di intersezione per la famiglia E_i con costante $c(k) := (n-k)!$ e si applichi la formula 21 dell'esercizio 10).

Formula delle k-partizioni. Una k-partizione di un insieme X è una famiglia $\mathcal{F} = \{A_1, .., A_k\}$ di k sottoinsiemi di X, disgiunti, non vuoti con $X = \cup_{1 \le i \le k} A_i$. Sia $I_k = \{1, 2..k\}$. L'insieme $\mathrm{Par}_k(X)$ delle k-partizioni di X è correlato con l'insieme $\mathrm{Sur}(X, I_k)$ in modo simile a come l'insieme $\mathcal{P}_k(X)$ dei k-sottoinsiemi è corelato con l'insieme $\mathrm{Inj}(I_k, X)$. Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathrm{Sur}(X, I_k) \to \mathrm{Par}_k(X)$$

che associa a $f \in \mathrm{Sur}(I_k, X)$ la k-partizione di X $F(f) = \{f^{-1}(1), f^{-1}(2), ..., f^{-1}(k)\}$. Le fibre tramite F di ogni elemento di $\mathrm{Par}_k(X)$ hanno tutte cardinalità $k!$: infatti gli elementi di $\mathrm{Sur}(X, I_k)$ che danno luogo alla stessa k-partizione di X sono esattamente le $\phi \circ f$ al variare di ϕ permutazione $\phi : I_k \to I_k$. Dunque per la (3) e per la (22), se $|X| = n$,

$$|\mathrm{Par_k(X)}| = \mathrm{k!}|\mathrm{Sur(X, I_k)}| = \sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{k}} (-1)^{\mathrm{k-j}} \frac{\mathrm{j^n}}{\mathrm{(k-j)!j!}}. \tag{24}$$

Esercizio 12. *Si provi la uguaglianza seguente, analoga alla (ii) dell'esercizio 3*

$$|\mathrm{Par}_k(X \cup \{x\})| = |\mathrm{Par}_k(X)| + |\mathrm{Par}_{k-1}(X)|, \quad (x \notin X)$$

(si osservi che le k-partizioni di $X \cup \{x\}$ si possono ripartire in due classi: quelle dove $\{x\}$ è uno dei k sottoinsiemi e quelle dove $\{x\}$ è contenuto propriamente in uno dei k sottoinsiemi).

Indicando $P(n, k)$ la cardinalità di $\mathrm{Par}_k(X)$ quando $|X| = n$ si ha perciò, analogamente alle (15)

$$\begin{aligned} &(i) & P(0,k) &= \delta_{0,k} \\ &(ii) & P(n+1,k) &= P(n,k) + P(n,k-1) \quad n \ge 0,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{25}$$

Esercizio 13. *Si definisca una successione di polinomi*

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} P(n,k) x^k, \qquad n \in \mathbb{N}$$

e si traducano le relazioni (25) in una legge di ricorrenza per i polinomi p_n. Si provi che

$$p_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} x^n.$$

Si ritrovino le relazioni (24) considerando i coefficienti del prodotto alla Cauchy della serie di e^{-x} per la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} x^n$. Infine si provi che la cardinalità dell'insieme $\mathrm{Par}(X)$ di tutte le partizioni di X con $|X| = n$ è

$$|\mathrm{Par_k(X)}| = \mathrm{p_n(1)} = \mathrm{e}^{-1} \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \frac{\mathrm{k^n}}{\mathrm{k!}}.$$

Grafi. Un *grafo* (finito e simmetrico) con insieme di vertici Vè un sottoinsieme G del prodotto cartesiano $V \times V$ disgiunto dalla diagonale, cioè tale che per ogni$u \in V$, $(u, u) \notin G$, e simmetrico, cioè (u, v) appartiene a V se e solo se (v, u) appartiene a V. Due vertici u e v si dicono adiacenti se $(u, v) \in G$; si dice anche che (u, v) è un arco. Molte situazioni concrete o teoriche si descrivono per mezzo di grafi (reti stradali, telecomunicazioni, connessioni nei circuiti elettrici,...), e molti problemi concreti si traducono in problemi di grafi. Un problema tipico è stabilire se due grafi (V, G) e (V', G') siano o no isomorfi (cioè, se esista una bigezione $\phi : V \to V'$ tale che $(u, v) \in G$ se e solo se $(\phi(u), \phi(v)) \in G'$. Benchè si possa decidere in tempo finito se due grafi (finiti) siano o no isomorfi, il tempo richiesto è estremamente lungo.[3] Il numero $c(G)$ delle componenti connesse di un grafo G è evidentemente invariante per grafi isomorfi; in particolare è invariante la proprietà di essere connesso. Un altro invariante associato a un grafo è il suo *polinomio cromatico* (Birkhoff, 1912), descritto nell'esercizio seguente. Una *colorazione* di un grafo (V, G) a $x \in \mathbb{N}$ colori è una applicazione $\chi : V \to \{1, 2, ..., x\}$ tale che per ogni $(u, v) \in G$ si abbia $\chi(u) \neq \chi(v)$ (vertici adiacenti hanno colori diversi).

Esercizio 14. *(Polinomi cromatici.) Si provi che il numero di colorazioni di un grafo G con x colori è espresso a un polinomio monico di grado $n := |V|$ in x*

$$p_G(x) := \sum_{\Gamma \subset G} (-1)^{|\Gamma|} x^{c(\Gamma)},$$

dove la somma è estesa a tutti i sottografi Γ di G, compresi $\emptyset$ e G stesso.

Vi sono algoritmi efficienti per computare i polinomi cromatici, perciò questi forniscono un utile criterio per controllare se due grafi non sonio isomorfi.

[3] Il miglior algoritmo noto è poco più efficiente che provare una a una tutte le $n!$ bigezioni di $V \to V'$. In molti casi è però possibile stabilire presto se due grafi non sono isomorfi: una prima possibilità è confrontare il numero delle componenti connesse (la componente connessa di $v \in V$ del grafo (V, G) è l'insieme

$$[v] := \{w \in V \ : \ \exists u_i \in V,\ 1 \leq i \leq r,\ u_0 = v, u_r = w,\ (u_i, u_{i+i}) \in G\};$$

in particolare un grafo si dice connesso se ha una sola componente connessa.)