11 Settimana 15 - 19 maggio

Polinomi trigonometrici. Un polinomio trigonometrico di grado n è una funzione della forma

$$u(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=0}^{n} b_k \sin kx,$$

con $a_k, b_k \in \mathbb{C}$. Si tratta di una funzione a valori reali se e solamente se $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ per ogni k. In questo caso si dirà che u è un polinomio trigonometrico reale. Sostituendo nell'espressione per u le formule

$$\cos kx = \operatorname{Re} e^{ikx} = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \operatorname{Im} e^{ikx} = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

troviamo u in notazione esponenziale:

$$u(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad c_0 = a_0, \; c_k = \frac{a_k - b_k i}{2}, \; c_{-k} = \frac{a_k + b_k i}{2},$$

per $k \geq 1$. Il polinomio trigonometrico u è reale se e solamente se $c_{-k} = \overline{c_k}$ per ogni k. In questo caso,

$$a_0 = c_0, \quad a_k = 2\operatorname{Re} c_k, \quad b_k = -2\operatorname{Im} c_k, \tag{1}$$

per ogni $k \geq 1$.

Identità di Dirichlet. Osserviamo che

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

A destra troviamo la somma di una progressione geometrica, che possiamo sviluppare nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} &= e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.\end{aligned}$$

Otteniamo così la seguente identità di Dirichlet

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}. \tag{2}$$

Integrandola tra 0 e π troviamo

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} = \pi. \tag{3}$$

Esercizio 11.1 *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *una funzione continua. Allora*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Soluzione. Se $f(x) = c$ è una costante si trova

$$\int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = c \int_a^b \sin \lambda x \, dx = \frac{c}{\lambda}(\cos \lambda a - \cos \lambda b) \to 0$$

per $\lambda \to +\infty$. Sia $\epsilon > 0$. Dato che f è uniformemente continua su $[a,b]$, esiste una funzione $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ costante a tratti tale che $\|g - f\|_\infty < \epsilon$. La tesi segue dalla disuguaglianza

$$\left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \sin \lambda x \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| \, |\sin \lambda x| \, dx \leq \epsilon(b-a),$$

e da

$$\int_a^b g(x) \sin \lambda x \, dx \to 0$$

per $\lambda \to +\infty$, conseguenza di quanto visto prima. □

Dato che $(\sin(x/2))^{-1}$ è continua in $]0, 2\pi[$, da questo esercizio e da (3) deduciamo che

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^t \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \, dx = \pi, \quad \forall t \in]0, 2\pi[. \tag{4}$$

Coefficienti di Fourier. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e Riemann integrabile su $[0, 2\pi]$ (quindi su ogni intervallo limitato). Tra tutti i polinomi trigonometrici di grado n,

$$u(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

vogliamo trovare quello per il quale la quantità

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - u(x)|^2 \, dx$$

sia minima. In altre parole, ci interessa il polinomio trigonometrico di grado n che meglio approssima la f in norma L^2.

Ricordando che $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w})$, si ha

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - u(x)|^2 \, dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx + \int_0^{2\pi} |u(x)|^2 \, dx - 2\mathrm{Re} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{u(x)} \, dx.$$

Sostituendo l'espressione per u, gli ultimi due integrali si riscrivono come

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 \, dx = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right) \left(\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} e^{-ikx} \right) dx$$

$$= \sum_{\substack{-n \le h \le n \\ -n \le k \le n}} c_k \overline{c_h} \int_0^{2\pi} e^{i(k-h)x} \, dx = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2,$$

e

$$-2\mathrm{Re} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{u(x)} \, dx = -2\pi \sum_{k=-n}^{n} 2\mathrm{Re}\,(\hat{f}_k \overline{c_k}),$$

dove

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx. \tag{5}$$

Scrivendo $|c_k|^2 = |c_k - \hat{f}_k|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\hat{f}_k \overline{c_k}) - |\hat{f}_k|^2$, vediamo che la quantità da minimizzare risulta essere

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - u(x)|^2 \, dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx + 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k - \hat{f}_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k|^2.$$

Questa quantità assume il valore minimo se e solamente se $c_k = \hat{f}_k$ per ogni k tra $-n$ e n. Inoltre risulta

$$2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k|^2 \le \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx. \tag{6}$$

Abbiamo quindi dimostrato che il polinomio trigonometrico di grado n che meglio approssima la f in norma L^2 è

$$u(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikx}, \tag{7}$$

dove i numeri $\hat{f}_k$, che si dicono *coefficienti di Fourier* di f, sono dati da (5). La disuguaglianza (6) prende il nome di *disuguaglianza di Bessel*, ed implica che la famiglia $\{|\hat{f}_k|^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è sommabile. In particolare, $\hat{f}_k \to 0$ per $|k| \to +\infty$.

Coefficienti di Fourier di una funzione reale. Se la funzione f è reale, è spesso più comodo usare la notazione con seni e coseni. Osserviamo innanzitutto che se f è reale, allora

$$\hat{f}_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} \, dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx} = \overline{\hat{f}_k},$$

quindi il polinomio trigonometrico (7) è reale. Dalle relazioni (1) si ottiene allora

$$u(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx, \tag{8}$$

con

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \tag{9}$$

per ogni $k \geq 1$. Osserviamo che se f è una funzione pari, allora i b_k sono tutti nulli. Se f è una funzione dispari, gli a_k sono tutti nulli. La disuguaglianza di Bessel si riscrive come

$$2\pi|a_0|^2 + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx, \tag{10}$$

Come prima, le successioni (a_k) e (b_k) hanno quadrato sommabile, ed in particolare sono infinitesime.

Serie di Fourier. Osserviamo che il k-esimo coefficiente di Fourier $\hat{f}_k$ non dipende dal grado $n \geq |k|$ del polinomio trigonometrico approssimante. È naturale considerare allora la *serie di Fourier* di f, cioè

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}_k e^{ikx},$$

oppure nel caso reale

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

e chiedersi se questa converga alla funzione f, ed in quale senso.

Rispondiamo a queste domande nel caso della funzione $f(x) = x$ per $-\pi < x < \pi$, f prolungata per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ (dopo aver assegnato valori qualsiasi ma opposti in $-\pi$ e π). Si tratta di una funzione continua a tratti, con discontinuità a salto nei punti $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Essendo f una funzione dispari, i suoi coefficienti di Fourier a_k sono tutti nulli, e

$$\begin{aligned} b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}x\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx \\ &= -\frac{2}{k}\cos k\pi + \frac{2}{k^2\pi}[\sin kx]_0^{\pi} = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Studiamo la convergenza della serie di Fourier di f, cioè di

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx.$$

Integrando tra 0 e t l'identità di Dirichlet (2), otteniamo

$$t + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kt = \int_0^t \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\,dx.$$

Dalla (4) deduciamo che

$$t + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kt = \pi, \quad \forall t \in]0, 2\pi[.$$

Con la sostituzione $t = x + \pi$, tenendo conto del fatto che $\sin k(x + \pi) = (-1)^k \sin kx$, otteniamo quindi

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin kx, \quad \forall x \in]-\pi, \pi[,$$

perciò la serie di Fourier di f converge ad f in ogni punto dove f è regolare (in questo caso, derivaibile infinite volte). Nei punti $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier converge banalmente a 0: si noti che questo valore è la media aritmetica tra i limiti sinistri e destri di f in $(2k+1)\pi$.

Convergenza puntuale delle serie di Fourier. Il fenomeno che abbiamo appena visto è del tutto generale. Diamo infatti la seguente:

Definizione 11.1 *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato. Una funzione $f : I \to \mathbb{C}$ si dice continua a tratti se ha un insieme finito di punti di discontinuità, in ciascuno dei quali esistono finiti il limite sinistro e il limite destro. I valori di questi limiti in x si indicano con $f(x-)$ e $f(x+)$, rispettivamente. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{C}$ si dice continua a tratti se è continua a tratti in ogni sottointervallo limitato. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti e sia $x \in I$. Se esiste finito il limite*

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x-)}{h}, \quad \textit{rispettivamente} \quad \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x+)}{h},$$

si dice che f possiede derivata sinistra, rispettivamente destra, in x. Le derivate sinistra e destra si indicano con $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$.

Vale allora il seguente:

Teorema 11.1 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica, continua a tratti, che possiede derivate sinistra e destra in ogni punto. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big).$$

Quindi la serie di Fourier di f converge a $f(x)$ nei punti x dove f è continua, converge al valor medio tra limite sinistro e destro dove f ha una discontinuità.

Dimostrazione. Dalla formula (5) per i coefficienti di Fourier segue che

$$u_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik(t-x)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \sum_{k=-n}^{n} e^{-iks}\, ds,$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili $s = t - x$ ed il fatto che l'integrale di una funzione 2π-periodica è lo stesso su ogni intervallo di lunghezza 2π. Dall'identità di Dirichlet (2) ricaviamo allora

$$u_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \frac{\sin((n+1/2)s)}{\sin(s/2)}\, ds.$$

Per la (3), la funzione $\sin((n+1/2)s)/\sin(s/2)$ ha integrale π su $[0,\pi]$, ed essendo una funzione pari anche su $[-\pi, 0]$. Allora

$$u_n(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \tfrac{\sin((n+1/2)s)}{\sin(s/2)}\, ds - \tfrac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+) \tfrac{\sin((n+1/2)s)}{\sin(s/2)}\, ds - \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x-) \tfrac{\sin((n+1/2)s)}{\sin(s/2)}\, ds$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x+s) - f(x+)}{\sin(s/2)} \sin((n+1/2)s)\, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{f(x+s) - f(x-)}{\sin(s/2)} \sin((n+1/2)s)\, ds$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} g(s) \sin((n+1/2)s)\, ds,$$

dove si è posto

$$g(s) = \begin{cases} \frac{f(x+s)-f(x-)}{\sin(s/2)} & \text{se } -\pi \leq s < 0, \\ 0 & \text{se } s = 0, \\ \frac{f(x+s)-f(x+)}{\sin(s/2)} & \text{se } 0 < s \leq \pi. \end{cases}$$

Se mostriamo che g è una funzione continua a tratti su $[-\pi, \pi]$, allora per l'Esercizio 11.1 la quantità sopra tende a zero per $n \to +\infty$, che è quanto volevamo dimostrare. In effetti, una volta dimostrato che g è continua a tratti - e quindi Riemann integrabile su $[-\pi, \pi]$ - il fatto che la quantità sopra sia infinitesima segue anche dalla formula

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} g(s) \sin((n+1/2)s)\, ds = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} g(s) \cos(s/2) \sin ns\, ds + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} g(s) \sin(s/2) \cos ns\, ds,$$

dove i due addendi sono coefficienti di Fourier delle funzioni Riemann integrabili $g(s)\cos(s/2)$ e $g(s)\cos(s/2)$ (vedi (9), che come abbiamo visto sono infinitesimi.

Dato che f è continua a tratti e la restrizione di $\sin(s/2)$ a $[-\pi, \pi]$ si annulla soltanto per $s = 0$, dobbiamo solo mostrare che esistono finiti i limiti di $g(s)$ per $s \to 0+$ e per $s \to 0+$. Risulta

$$\lim_{s \to 0+} g(s) = \lim_{s \to 0+} \frac{f(x+s) - f(x+)}{s} \frac{s}{\sin(s/2)} = 2f'_+(x),$$
$$\lim_{s \to 0-} g(s) = \lim_{s \to 0-} \frac{f(x+s) - f(x-)}{s} \frac{s}{\sin(s/2)} = 2f'_-(x),$$

avendo supposto l'esistenza di derivate destra e sinistra di f in x. Questo conclude la dimostrazione. □

Nel caso di una funzione reale il teorema appena dimostrato ha come immediata conseguenza il seguente:

Corollario 11.2 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, continua a tratti, che possiede derivate sinistra e destra in ogni punto. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big) = \frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big).$$

dove gli a_k, b_k sono i coefficienti di Fourier di f dati da (9).