3 Settimana 27 febbraio - 3 marzo

3.1 Il problema della primitiva ed il calcolo degli integrali

Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Una *primitiva di* f è una funzione derivabile $F : I \to \mathbb{R}$ tale che $F' = f$. Se $f : I \to \mathbb{R}$ possiede una primitiva F, allora le primitive di f sono tutte e sole le funzioni $F + c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è continua, allora la funzione*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\, dt,$$

è una primitiva di f*.*

Corollario 3.2 *Se* $f \in C^0([a, b])$ *e* F *è una primitiva di* f*, allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è comodo indicare con $[f]_a^b$ il numero $f(b) - f(a)$.

Corollario 3.3 (Formula di integrazione per parti) *Siano* $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$*, con* $F' = f$ *e* $G' = g$ *continue su* $[a, b]$*. Allora*

$$\int_a^b f(x)G(x)\, dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\, dx.$$

Teorema 3.4 (Formula di integrazione per cambio di variabile) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua e* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivabile con derivata* g' *continua e* $g([a, b]) \subset I$*. Allora*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt = \int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx.$$