3 Settimana 10-14 ottobre

Esercizio 3.1 *Dimostrare le seguenti proprietà dell'estremo superiore ed inferiore di sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$.

1. $\sup A \leq \sup B$ *se e solamente se*

$$\{\textit{maggioranti di } A\} \supset \{\textit{maggioranti di } B\}.$$

   (a) *Se* ogni *elemento di* A *è maggiorato da* qualche *elemento di* B *(cioè* $\forall a \in A$ $\exists b \in B : b \geq a$*) allora* $\sup A \leq \sup B$;

   (b) $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$.

2. (Associatività del sup) $\sup\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sup_{i\in I}(\sup A_i)$. *In particolare,* $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$.

3. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. *Più in generale,* $\sup \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \sup A_i$.

4. *Se* $A, B \subset \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$. *Più in generale, se* $A_i \subset \mathbb{R}^+$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sup \prod_{i=1}^n A_i = \prod_{i=1}^n \sup A_i$.

5. *Date* $f, g : X \to \mathbb{R}$, $\sup_X(f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g$.

6. *Date* $f, g : X \to \mathbb{R}^+$, $\sup_X(f \cdot g) \leq \sup_X f \cdot \sup_X g$.

7. *Mostrare che* $\inf A = -\sup(-A)$ *e dedurre le proprietà dell'estremo inferiore analoghe a (1)-(6).*

Soluzione.

1. Il minimo dei maggioranti di A è minore o uguale al minimo dei maggioranti di B se e solamente se il minimo dei maggioranti di A è minore o uguale ad ogni maggiorante di B, se e solamente se ogni maggiorante di B è anche maggiorante di A.

   (a) Se ogni elemento di A è maggiorato da qualche elemento B, allora ogni maggiorante di B è anche maggiorante di A, e la conclusione segue da (1).

   (b) Caso particolare del punto precedente.

2. Ogni elemento di $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ è maggiorato da qualche elemento di $B := \{\sup A_i \mid i \in I\}$, quindi per (1-a) vale il $\leq$. Per (1-b) B è maggiorato da $\sup A$, quindi vale il $\geq$.

3. Iniziamo con l'osservare che l'estremo superiore si comporta addittivamente rispetto a traslazioni di un insieme:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \subset \mathbb{R}, \quad \sup(\lambda + A) = \lambda + \sup A.$$

   Dato che $A + B = \bigcup_{a\in A}(a+B)$, per la (2) si ha

$$\begin{aligned}\sup(A+B) = \sup \bigcup_{a\in A}(a+B) &= \sup_{a\in A} \sup(a+B) = \sup_{a\in A}(a + \sup B) \\ &= \sup(\sup B + A) = \sup B + \sup A.\end{aligned}$$

4. Iniziamo con l'osservare che l'estremo superiore si comporta moltiplicativamente rispetto a dilatazioni di un insieme:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \forall A \subset \mathbb{R}, \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup A.$$

Dato che $A \cdot B = \bigcup_{a\in A} aB$, per la (2) si ha

$$\begin{aligned}\sup(A \cdot B) = \sup \bigcup_{a\in A}(aB) &= \sup_{a\in A} \sup(aB) = \sup_{a\in A}(a \sup B) \\ &= \sup((\sup B)A) = \sup B \cdot \sup A.\end{aligned}$$

5. L'insieme $\{f(x) + g(x) \mid x \in X\}$ è contenuto in $f(X) + g(X)$, quindi la conclusione segue da (1-b) e (3). Si noti che, dato che appena X ha almeno due elementi l'inclusione è stretta, anche la disuguaglianza può essere stretta.

6. L'insieme $\{f(x)g(x) \mid x \in X\}$ è contenuto in $f(X) \cdot g(X)$, quindi la conclusione segue da (1-b) e (4). Si noti che, dato che appena X ha almeno due elementi l'inclusione è stretta, anche la disuguaglianza può essere stretta.

7. Un numero x è minorante di A se e solamente se $-x$ è maggiorante di $-A$. Quindi x è il massimo dei maggioranti di A se e solamente se $-x$ è minimo dei maggioranti di $-A$, da cui l'identità $\inf A = -(\sup(-A))$.

Elenchiamo la proprietà dell'estremo inferiore analoghe a (1)-(6).

1. $\inf A \geq \inf B$ se e solamente se

$$\{\text{minoranti di } A\} \supset \{\text{minoranti di } B\}.$$

   (a) Se *ogni* elemento di A è minorato da *qualche* elemento di B (cioè $\forall a \in A\ \exists b \in B : b \leq a$) allora $\inf A \geq \inf B$;

   (b) $A \subset B \implies \inf A \geq \inf B$.

2. *(Associatività dell'*$\inf$*)* $\inf\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \inf_{i\in I}(\inf A_i)$. In particolare, $\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}$.

3. $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$. Più in generale, $\inf \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \inf A_i$.

4. Se $A, B \subset \mathbb{R}^+$, $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$. Più in generale, se $A_i \subset \mathbb{R}^+$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\inf \prod_{i=1}^n A_i = \prod_{i=1}^n \inf A_i$.

5. Date $f, g : X \to \mathbb{R}$, $\inf_X(f + g) \geq \inf_X f + \inf_X g$.

6. Date $f, g : X \to \mathbb{R}^+$, $\inf_X(f \cdot g) \geq \inf_X f \cdot \inf_X g$.

$\square$

Esercizio 3.2 *Siano $x > 0$, $y > 0$ numeri reali, $n \in \mathbb{Z}^+$. Verificare che $x < y$ se e solamente se $x^n < y^n$.*

Soluzione. Per induzione su $n \in \mathbb{Z}^+$. L'equivalenza è banale per $n = 1$. Supponiamo l'equivalenza vera per un certo $n \in \mathbb{Z}^+$. Da $x < y$ segue quindi $x^n < y^n$, e moltiplicando per il numero positivo x si ha $x^{n+1} < y^n x < y^n y = y^{n+1}$. Da $x^{n+1} < y^{n+1}$, moltiplicando per il numero positivo $1/x$ segue $x^n < y^{n+1}/x = y^n(y/x)$. Se per assurdo $x \geq y$, si ha $y/x \leq 1$ e la disuguaglianza precedente implica $x^n < y^n$, che per l'ipotesi induttiva implica $x < y$, una contraddizione. $\square$

Esercizio 3.3 *Provare che le seguenti serie sono convergenti e calcolarne la somma*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}.$$

Soluzione. Si tratta di serie telescopiche, cioè della forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n = b_n - b_{n+1}$. In questo caso la somma parziale k-esima vale

$$\sum_{n=0}^{k} a_n = \sum_{n=0}^{k} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{k+1}.$$

Per la prima serie si ha:

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$$

Per la seconda

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{k} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

Per la terza

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{k} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(k+1)^2}$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

Per la quarta

$$\begin{aligned}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} &= \frac{4n-1}{8(2n-1)(2n+1)} - \frac{4n+3}{8(2n+1)(2n+3)}\\ \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} &= \frac{1}{8} - \frac{4k+3}{8(2k+1)(2k+3)}\\ \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Per la quinta

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)\\ \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} &= \frac{1}{12} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5}\right)\\ \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} &= \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

$\square$