Quinto appello del
primo modulo
di ANALISI
–04.09.2006–

1. Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la sommabilità della somma infinita
$$\sum_{\substack{n\geq 1\\ m\geq 1}} \frac{1}{(n+m)^\alpha}.$$

Soluzione. Per la proprietà associativa delle somme infinite di numeri positive si ha
$$\sum_{\substack{n\geq 1\\ m\geq 1}} \frac{1}{(n+m)^\alpha} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k^\alpha}.$$
Dato che
$$\frac{1}{2}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \leq \frac{k-1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^{\alpha-1}},$$
dal confronto con la serie armonica generalizzata segue che la somma è finita se e solamente se $\alpha > 2$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{8x^2+4x+1}.$$
   (a) Determinare a, b, α, β tali che
$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + o(x^{-1/3}) \quad \text{per } x \to +\infty.$$
   (b) Determinare $A = f([0,+\infty[)$ e dimostrare che $f : [0,+\infty[\to A$ è invertibile.
   (c) Determinare d, δ tali che
$$f^{-1}(y) = dy^\delta + o(y^{3/2}) \quad \text{per } y \to +\infty.$$

Soluzione. (a) Risulta
$$f(x) = \sqrt[3]{8x^2+4x+1} = 2x^{2/3}\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{8x^2}\right)^{1/3} = 2x^{2/3}\left(1+\frac{1}{2x}+o(1/x)\right)^{1/3},$$

e dato che $(1+y)^{1/3} = 1 + y/3 + o(y)$ per $y \to 0$, si ha

$$f(x) = 2x^{2/3}\left(1 + \frac{1}{6x} + o(1/x)\right) = 2x^{2/3} + \frac{1}{3}x^{-1/3} + o(x^{-1/3}).$$

(b) La funzione f è continua e strettamente crescente perché composizione di funzioni continue e strettamente crescenti. Inoltre $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Quindi

$$A = f([0,+\infty[) = [f(0),+\infty[= [1,+\infty[,$$

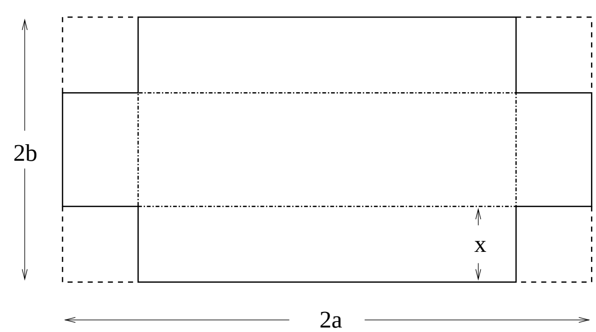
ed f è bigettiva da $[0,+\infty[$ su A. (c) Mostriamo che

$$f^{-1}(y) = 2^{-3/2}y^{3/2} + o(y^{3/2}) \quad \text{per } y \to +\infty.$$

Infatti, con il cambiamento di variabile $y = f(x)$ si ha

$$\frac{f^{-1}(y) - 2^{-3/2}y^{3/2}}{y^{3/2}} = \frac{x - 2^{-3/2}(2x^{2/3} + o(x^{2/3}))^{3/2}}{(2x^{2/3} + o(x^{2/3}))^{3/2}} = \frac{x - x(1+o(1))^{3/2}}{x(1+o(1))^{3/2}} = o(1).$$

3. Dai quattro angoli di un foglio rettangolare di lati $2a$ e $2b$ si ritagliano quattro quadrati di lato x e si piegano i quattro rettangoli di bordo in modo da formare una scatola senza coperchio (vedi figura). Determinare x in modo che la scatola abbia capienza massima.



Soluzione. Il volume della scatola è

$$V(x) = 4x(a-x)(b-x).$$

Dobbiamo trovare il massimo di V nell'intervallo compreso tra 0 e $\min\{a,b\}$. Agli estremi la funzione si annulla. Dallo studio della derivata,

$$V'(x) = 4(3x^2 - 2(a+b)x + ab),$$

che si annulla nei punti

$$\alpha = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}, \quad \beta = \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}}{3},$$

ricaviamo che V cresce in $]-\infty, \alpha]$, decresce in $[\alpha, \beta]$, e cresce in $[\alpha, +\infty[$. Il punto α appartiene all'intervallo di estremi 0 e $\min\{a, b\}$, ed è quindi il punto di massimo richiesto.

Terzo appello del

secondo modulo

di ANALISI

–04.09.2006–

1. Mostrare che se $\phi \in C^2([0,+\infty[)$ è tale che $\phi'' \geq 0$ per $x \geq 0$ e $\phi(0) \leq 0$ allora la funzione $\phi(x)/x$ è monotona.

   Soluzione. Si ha che
$$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} + \frac{\phi(0)}{x}$$
   è crescente perchè somma di funzioni crescenti, la prima perchè rapporto incrementale di una funzione convessa, la seconda perchè $1/x$ è decrescente e $\phi(0) \leq 0$.

2. Mostrare che tutte le soluzioni dell'equazione
$$u'(x) + u(x)\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$
   sono infinitesime per $x \to +\infty$.

   Soluzione. Si ha
$$u(x) = u(0)e^{-\int_0^x \sin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt}.$$
   La funzione $\sin 1/\sqrt{1+t^2}$ è asintotica a $1/t$ per $t \to +\infty$, quindi il suo integrale diverge a $+\infty$. Ne segue che u è infinitesima.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = \sin(\lambda|x|), \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$
   prolungata ad una funzione 2π-periodica.

   (a) Sviluppare f in serie di Fourier.

   (b) Valutando tale sviluppo per $x = 0$ e facendo tendere λ a zero, dimostrare che
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{12}\pi^2.$$

Soluzione. (a) La funzione f è pari, quindi il suo sviluppo consiste di soli coseni. I coefficienti sono

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\pi\lambda}(1-\cos(\lambda\pi)),$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(\lambda x)\cos(kx) = \frac{2\lambda}{\pi(k^2-\lambda^2)}\left((-1)^k\cos(\lambda\pi)-1\right),$$

dove per calcolare il secondo integrale si è usata la formula

$$\sin(\lambda x)\cos(kx) = \frac{\sin((\lambda+k)x)+\sin((\lambda-k)x)}{2}.$$

Dato che la funzione f è C^1 a tratti, il suo sviluppo di Fourier converge uniformemente e si ha

$$\sin(\lambda|x|) = \frac{1}{\pi\lambda}(1-\cos(\lambda\pi)) + \sum_{k=1}^\infty \frac{2\lambda}{\pi(k^2-\lambda^2)}\left((-1)^k\cos(\lambda\pi)-1\right)\cos(kx),$$

per ogni $x\in[-\pi,\pi]$. (b) Per $x=0$ si trova l'identità

$$\left(\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2-\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^2}\right)\cos(\lambda\pi) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2-\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^2},$$

da cui per $\lambda\to 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2} + o(1) - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2\pi^2}{2}+o(\lambda^2)\right) = \frac{\pi^2}{6} + o(1) - \frac{1}{2\lambda^2},$$

dove si è usato il fatto che la somma degli inversi dei quadrati degli interi positivi è $\pi^2/6$. Dall'ultima identità segue che

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$