Analisi Matematica II - Secondo Compitino
31 Maggio 2006

Esercizio 1. (a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{1 - y(t)}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'''(t) = \frac{1 - u''(t)}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

che risultano estendibili per continuità in $t = 0$.
(c) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione (1) derivabili su $\mathbb{R}$.

Soluzione. (a) L'equazione è equivalente a

$$ty'(t) + y(t) = 1, \quad \forall t \neq 0.$$

Al primo membro troviamo la derivata di $ty(t)$, dunque si ha

$$ty(t) = t + a_1 \texttt{ per } t < 0, \quad ty(t) = t + a_2 \texttt{ per } t > 0,$$

da cui

$$y(t) = \begin{cases} \frac{a_1}{t} + 1 & \texttt{se } t < 0, \\ \frac{a_2}{t} + 1 & \texttt{se } t > 0. \end{cases}$$

(b) Risulta $u'' = y$, dove y è una delle soluzioni trovate sopra. Le primitive delle primitive di $a/t+1$ su un intervallo sono tutte e sole le funzioni

$$a(t \log t - t) + \frac{1}{2}t^2 + bt + c,$$

al variare di $b, c \in \mathbb{R}$. Dato che $t \log t - t$ ha limite 0 per $t \to 0$, le u che risolvono l'equazione data per $t \neq 0$ e che sono continue in 0 sono tutte e sole le funzioni

$$u(t) = \begin{cases} a_1(t \log t - t) + \frac{1}{2}t^2 + b_1 t + c & \texttt{se } t < 0, \\ a_2(t \log t - t) + \frac{1}{2}t^2 + b_2 t + c & \texttt{se } t > 0. \end{cases}$$

(c) Dato che l'estensione per continuità della funzione $t \log t$ non possiede derivata destra e sinistra in 0, le uniche soluzioni derivabili dell'equazione per u sono

$$u(t) = \frac{1}{2}t^2 + bt + c.$$

Esercizio 2. Siano f e g le funzioni definite da

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-s^2}\,ds\right)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

(a) Mostrare che f e g sono derivabili e determinare le loro derivate.
(b) Dedurre che esiste una costante c tale $f(x) + g(x) = c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e determinarla.
(c) Studiando il limite di $g(x)$ per $x \to +\infty$, ridimostrare la formula

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2.$$

Soluzione. (a) Per il teorema fondamentale del calcolo e per la regola di Leibniz f è derivabile e

$$f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-s^2}\,ds.$$

Per quanto riguarda la g, mostriamo che si può derivare sotto il segno di integrale, cioè che g è derivabile e vale

$$g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt. \tag{2}$$

Per ogni $t \in [0,1]$ la funzione $G_t(x) = e^{-x^2(1+t^2)}/(1+t^2)$ è derivabile infinite volte e vale

$$G_t'(x) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}, \quad |G_t''(x)| = |e^{-x^2(1+t^2)}[4x^2(1+t^2)-2]| \le 8x^2+2.$$

Fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e sia $|h| \le 1$. Per la formula di Taylor con resto di Lagrange esiste ξ compreso tra x e $x+h$ tale che

$$|G_t(x+h) - G_t(x) - G_t'(x)h| = \frac{1}{2}|G_t''(\xi)|h^2 \le [4(|x|+1)^2+2]h^2,$$

dove si è usato il fatto che $|\xi| \leq |\xi - x| + |x| \leq |h| + |x| \leq |1| + |x|$. Integrando questa disuguaglianza in t su $[0,1]$ otteniamo

$$\left| g(x+h) - g(x) + 2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt \right| \leq [4(|x|+1)^2 + 2]h^2 = o(h)$$

per $h \to 0$, da cui g è derivabile in x e vale (2).

(b) Con il cambio di variabile $xt = s$ si trova

$$g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{x^2} \int_0^x e^{-s^2}\,ds = -f'(x),$$

da cui $(f+g)' = 0$, e quindi $f+g$ è costante. Per $x = 0$ si trova

$$f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Quindi $f(x) + g(x) = \pi/4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) Risulta

$$0 \leq g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dt = e^{-x^2},$$

perciò $g(x)$ tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds \right)^2 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{4} - g(x) \right) = \frac{\pi}{4},$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Esercizio 3. Sia y soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{1 - y(t)^\alpha}, \\ y(0) = 0, \end{cases} , \quad \alpha > 0.$$

(a) Mostrare che esiste $T > 0$ tale che $y(T) = 1$.

(b) Mostrare che il più piccolo T con la proprietà sopra è

$$T = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione con variabili separabili, ed integrando troviamo

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - y^\alpha}}\, dy = t.$$

Il numero T richiesto dal punto (b) è dunque

$$T = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^\alpha}}\, dy,$$

purchè tale integrale sia finito. Con il cambio di variabile $y^\alpha = x$ troviamo

$$T = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (1 - x)^{-1/2} x^{1/\alpha - 1}\, dx = \frac{1}{\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right).$$

Ricordando la formula per la funzione Beta in termini della Gamma, si trova

$$T = \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(1/2 + 1/\alpha)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(1/2 + 1/\alpha)},$$

dove si è usato il fatto che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.