Soluzione Compito Analisi I - 10 gennaio 2006

Esercizio 1. Indichiamo con $Z_n \subset \mathbb{C}$ l'insieme delle radici n-esime di 1,

$$Z_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Consideriamo la funzione $f : Z_{40} \to Z_{40}$ definita da $f(z) = z^2$.

(a) Al variare di $z \in Z_{40}$ determinare la cardinalità $|f^{-1}(\{z\})|$.

(b) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$A := \{h \circ f \mid h : Z_{40} \to Z_{40},\ h \text{ bigettiva}\}.$$

(c) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$B := \{f \circ h \mid h : Z_{40} \to Z_{40},\ h \text{ bigettiva}\}.$$

(d) (Facoltativo) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$C := \{h^{-1} \circ f \circ h \mid h : Z_{40} \to Z_{40},\ h \text{ bigettiva}\}.$$

Soluzione. (a) Le radici 40-esime di 1 sono i 40 numeri complessi

$$e^{2\pi i k/40}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, 39\}.$$

Se $z \in Z_{40}$, allora $f(z)^{20} = (z^2)^{20} = z^{40} = 1$, cioè $f(z)$ è una radice 20-esima di 1, quindi $f(Z_{40}) \subset Z_{20}$. Data una radice 20-esima di 1, ossia un numero z tale che $z^{20} = 1$, le sue due radici quadrate w e $-w$ verificano $w^{40} = (w^2)^{20} = z^{20} = 1$ e $(-w)^{40} = 1$, e quindi sono entrambe radici 40-esime di 1. Perciò $f(Z_{40}) = Z_{20}$, e per ogni $z \in Z_{20}$ l'insieme $f^{-1}(\{z\})$, ossia l'insieme dei $w \in Z_{40}$ tali che $f(w) = z$, è costituito dalle 2 radici quadrate di z. Da $f(Z_{40}) = Z_{20}$ segue anche che le due radici quadrate di una radice 40-esima di 1 che non è radice 20-esima di 1 non appartengono a Z_{40} (lo si potrebbe verificare anche direttamente usando la formula esponenziale per le radici n-esime). In conclusione

$$|f^{-1}(\{z\})| = \begin{cases} 2 & \text{se } z \in Z_{20}, \\ 0 & \text{se } z \in Z_{40} \setminus Z_{20}. \end{cases}$$

(b) L'insieme delle $h : Z_{40} \to Z_{40}$ bigettive - ossia delle permutazioni di Z_{40} - ha cardinalità 40!, ma se h e g sono permutazioni distinte, $h \circ f$ e $g \circ f$ non sono necessariamente distinte. Vediamo di capire quando h e g producono applicazioni $h \circ f$ e $g \circ f$ identiche. Fissata h permutazione di Z_{40}, le permutazioni g di Z_{40} tali che $g \circ f = h \circ f$ sono esattamente quelle permutazioni che coincidono con h sull'immagine di f, cioè su Z_{20}. Il numero di tali permutazioni g è dunque pari al numero delle permutazioni di $Z_{40} \setminus Z_{20}$, ossia 20!. La cardinalità di A sarà dunque

$$|A| = \frac{40!}{20!}.$$

Più formalmente: la relazione $g|_{Z_{20}} = h|_{Z_{20}}$ è una relazione di equivalenza $\sim$ sull'insieme delle permutazioni di Z_{40}, e $g \circ f = h \circ f$ se e solamente se $g \sim h$. Quindi A è equipotente al quoziente dell'insieme delle permutazioni di Z_{40} per questa relazione di equivalenza. Dato che ciascuna classe di equivalenza ha cardinalità 20!, l'insieme quoziente ha cardinalità 40!/20!.

(c) Data h permutazione di Z_{40}, la permutazione g di Z_{40} verifica $f \circ h = f \circ g$, ossia $h^2 = g^2$, se e solamente se per ogni $z \in Z_{40}$, $g(z)$ vale $h(z)$ oppure $-h(z)$. Scegliamo 20 elementi $z_1, \dots, z_{20}$ in Z_{40} in modo che

$$Z_{40} = \{h(z_1), -h(z_1), \dots, h(z_{20}), -h(z_{20})\}.$$

Una permutazione g tale che $g(z) \in \{h(z), -h(z)\}$ per ogni z è univocamente determinata dai suoi valori in $z_1, \dots, z_{20}$, per ciascuno dei quali si hanno due possibilità. Infatti se $z \in Z_{40} \setminus \{z_1, \dots, z_{20}\}$, risulterà $h(z) = -h(z_k)$ per un certo k e se abbiamo deciso che $g(z_k) = h(z_k)$ (rispettivamente che $g(z_k) = -h(z_k)$) si dovrà avere $g(z) = -h(z_k)$ (risp. $g(z) = h(z_k)$). Quindi abbiamo 2^{20} permutazioni g con la proprietà $g^2 = h^2$, da cui (ragionando come nel punto (b)),

$$|B| = \frac{40!}{2^{20}}.$$

(d) Due permutazioni h e g di Z_{40} sono tali che $h^{-1} \circ f \circ h = g^{-1} \circ f \circ g$ se e solamente se, posto $\sigma = h \circ g^{-1}$, si ha $f \circ \sigma = \sigma \circ f$. Fissata la permutazione h, l'associazione $g \mapsto h \circ g^{-1}$ definisce un'applicazione bigettiva

$$\{g \text{ permutazione di } Z_{40} \,|\, h^{-1} \circ f \circ h = g^{-1} \circ f \circ g\} \longrightarrow \{\sigma \text{ permutazione di } Z_{40} \,|\, f \circ \sigma = \sigma \circ f\}.$$

Chiamiamo D l'insieme di destra. Per ogni permutazione h, l'insieme delle permutazioni g che producono una $g^{-1} \circ f \circ g$ uguale a $h^{-1} \circ f \circ h$ è equipotente all'insieme D. Perciò

$$|C| = \frac{40!}{|D|},$$

e si tratta di determinare la cardinalità di D, ossia dell'insieme delle permutazioni di Z_{40} che commutano con f.

E' conveniente identificare Z_{40} con l'anello delle classi di resto modulo 40,

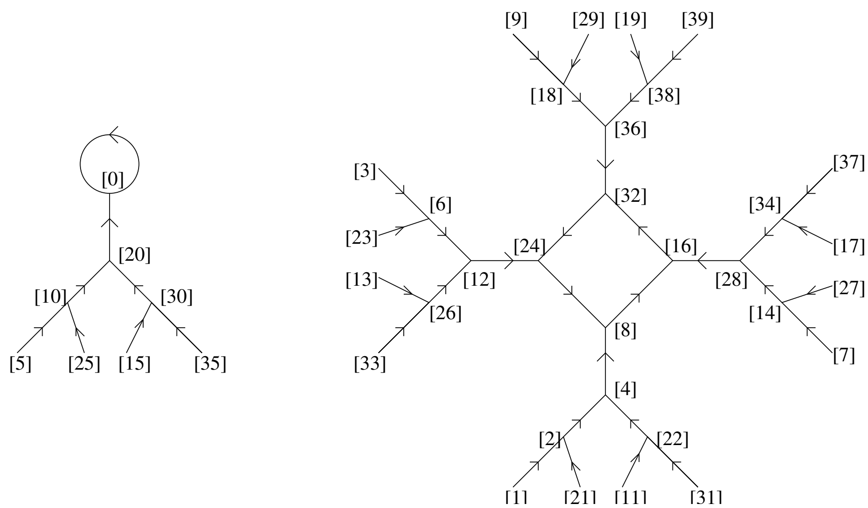
$$Z_{40} = \{[0], [1], \dots, [39]\}.$$

Con tale identificazione, l'applicazione f diventa la moltiplicazione per 2,

$$f([k]) = [2k].$$

L'applicazione f ha un unico punto fisso, [0], ed un'altra sola orbita periodica,

$$[8] \overset{f}{\mapsto} [16] \overset{f}{\mapsto} [32] \overset{f}{\mapsto} [24] \overset{f}{\mapsto} [8] \dots$$



Costruiamo un grafo orientato i cui vertici sono gli elementi di Z_{80}, e in cui mettiamo un lato orientato da $[h]$ a $[k]$ se e solo se $f([h]) = [k]$. Otteniamo il grafo rappresentato sopra.

Se f commuta con σ, allora anche f^n, l'n-esima iterata di f, commuta con σ. Da ciò si deduce facilmente che $\sigma \in D$ se e solamente se definisce un automorfismo del grafo orientato costruito sopra. Il sottografo di sinistra deve pertanto essere mandato in sé, e ci sono 8 modi di farlo (si possono scmbiare [10] con [30], e corrispondentemente scambiare [5] con [25] e [15] con [35]). Per quanto riguarda il sottografo di destra, il ciclo $([8], [16], [32], [24])$ può essere traslato in 4 modi possibili ([8] puó essere mandato in uno dei quattro elementi dell'orbita periodica, e questa scelta determina il destino di [16], [32], e [24]). I quattro grafi che arrivano nei quattro elementi dell'orbita periodica vengono traslati allo stesso modo, e ciascuno di essi può essere mandato nel grafo di pertinenza in 8 modi possibili (ciascuno di essi è isomorfo al grafo di sinistra). Mettendo assieme tutti questi fatti vediamo che D ha cardinalità $8 \cdot 4 \cdot 8^4 = 2^{17}$. Quindi

$$|C| = \frac{40!}{2^{17}}.$$

Esercizio 2. Sia $f(x) := x^2 e^x$.

(a) Dire se f ammette massimo o minimo sull'intervallo $]-\infty, -1]$.

(b) Discutere al variare di $t \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni reali dell'equazione $f(x) = t$.

(c) Mostrare che esiste un unico dato t per cui l'equazione $f(x) = t$ ha esattamente tre soluzioni $a < b < c$ con la proprietà che $c - b = b - a$. Si provi che in tal caso vale anche la relazione $ac + b^2 = 0$

Soluzione. La derivata di f,

$$f'(x) = x(x+2)e^x,$$

è positiva in $]-\infty,-2[$ e $]0,+\infty[$, negativa in $]-2,0[$, e nulla in -2 e 0. Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty,-2]$, strettamente decrescente su $[-2,0]$, e strettamente crescente su $[0,+\infty[$. Inoltre f è sempre positiva, tranne che in 0 dove si annulla, e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(a) Dallo studio preceddente segue che f ammette massimo $f(-2) = 4e^{-2}$ su $]-\infty,-1]$, ma che non ammette minimo su tale intervallo, poichè l'estremo inferiore di f su tale intervallo è 0, valore che non viene assunto in $]-\infty,-1]$.

(b) Dallo studio precedente e dal teorema degli zeri segue che l'equazione $f(x) = t$ non ha soluzioni se $t < 0$, ha una soluzione se $t = 0$, ha tre soluzioni se $0 < t < 4e^{-2}$, ha due soluzioni se $t = 4e^{-2}$, e ha una soluzione se $t > 4e^{-2}$.

(c) Per la discussione del punto (b), il t di cui vogliamo dimostrare esistenza ed unicità deve essere cercato nell'intervallo $]0,4e^{-2}[$. Siano

$$h_1 :]0,4e^{-2}] \to]-\infty,-2], \quad h_2 : [0,4e^{-2}] \to [-2,0], \quad h_3 : [0,+\infty[\to [0,+\infty[,$$

le funzioni inverse delle restrizioni di f agli intervalli $]-\infty,-2]$, $[-2,0]$, e $[0,+\infty[$. La h_1 e la h_3 sono strettamente crescenti, mentre la h_2 è strettamente decrescente. Tutte e tre le funzioni sono continue e surgettive, per il teorema di continuità dell'inversa e per il teorema degli zeri. Vogliamo dimostrare che esiste un unico $t \in]0,4e^{-2}[$ tale che

$$c - b = h_3(t) - h_2(t) = h_2(t) - h_1(t) = b - a.$$

Equivalentemente, definendo la funzione

$$g :]0,4e^{-2}] \to \mathbb{R}, \quad g(s) = h_3(s) + h_1(s) - 2h_2(s),$$

vogliamo dimostrare che g ha un unico zero in $]0,4e^{-2}[$. Dato che $h_1, h_3, -2h_2$ sono strettamente crescenti, la funzione g è strettamente crescente, perciò ha al più uno zero. Inoltre g è continua, e

$$\lim_{s\to0} g(s) = \lim_{s\to0}(h_1(s) + 0 - 2\cdot 0) = -\infty,$$
$$g(4e^{-2}) = -2 + h_3(4e^{-2}) - 2\cdot(-2) = h_3(4e^{-2}) + 2 > 0,$$

quindi g ha almeno uno zero. Concludiamo che esiste unico $t \in]0,4e^{-2}[$ tale che $g(t) = 0$, come richiesto. Detti $a = h_1(t)$, $b = h_2(t)$, $c = h_3(t)$, si ha $f(a) = f(b) = f(c) = t$, cioè

$$a^2e^a = b^2e^b = c^2e^c,$$

da cui, moltiplicando il primo membro per il terzo ed uguagliando il risultato al quadrato del secondo,

$$a^2c^2e^{a+c} = b^4e^{2b}.$$

Dato che $a + c = 2b$, si ha $a^2c^2 = b^4$, che tenuto conto dei segni di a, b, c ($a < 0$, $b < 0$, $c > 0$), implica $ac = -b^2$, ossia $ac + b^2 = 0$.

Esercizio 3. Data la funzione

$$F(x) = \log(1 + \sin x) - \sin \log(1 + x),$$

dire se 0 è punto di massimo locale, di minimo locale, oppure nessuna delle due cose.

Soluzione. Usiamo la formula di Taylor per sviluppare F in 0 a meno di $o(x^4)$. Osserviamo che in una composizione di funzioni è in genere conveniente iniziare a sviluppare la funzione più esterna. Dagli sviluppi $\log(1+y) = y - y^2/2 + y^3/3 - y^4/4 + o(y^4)$ e $\sin y = y - y^3/6 + o(y^4)$ per $y \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} F(x) = \log(1 + \sin x) - \sin \log(1 + x) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + o(\sin x^4) \\ &\quad - \log(1 + x) + \frac{1}{6}\log^3(1 + x) + o(\log^4(1 + x)) \\ &= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{4}\sin^4 x - \log(1 + x) + \frac{1}{6}\log^3(1 + x) + o(x^4), \end{aligned}$$

per $x \to 0$, dove abbiamo usato anche il fatto che $\sin x \sim \log(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$. Proseguendo con gli sviluppi, troviamo

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + o(x^2)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x + o(x^2)\right)^4 \\ &\quad -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \\ &= -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi $F(x) = -x^4/12 + o(x^4)$ per $x \to 0$, da cui 0 è un punto di massimo locale.