7 Settimana 7-11 novembre

7.1 Topologia di $\mathbb{R}$

Definizione 7.1 *Sia $x \in \mathbb{R}$. Un insieme $U \subset \mathbb{R}$ si dice* intorno di x *se contiene un intervallo aperto contenente x. Equivalentemente, se esiste $\epsilon > 0$ tale che $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset U$.*

Se W contiene un intorno U di x, allora W è intorno di x. In particolare, l'unione (anche infinita) di intorni di x è un intorno di x. Un'intersezione *finita* di intorni di x è un intorno di x. Un'intersezione infinita di intorni può non essere un intorno, come nel caso di $U_n =]-1/n, 1/n[$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Grazie al concetto di intorni, possiamo riformulare la definizione di successione convergente nel seguente modo: la successione (x_n) converge a x se e solamente se per ogni U intorno di x, $x_n \in U$ definitivamente.

Definizione 7.2 *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice aperto se è intorno di ogni suo punto. Un insieme $F \subset \mathbb{R}$ si dice chiuso se il suo complementare F^c è un aperto.*

Proposizione 7.1 *Unione (anche infinita) di aperti è aperta. Intersezione* finita *di aperti è aperta. Intersezione (anche infinita) di chiusi è chiusa. Unione* finita *di chiusi è chiusa.*

Proposizione 7.2 (Caratterizzazione di aperti e chiusi tramite successioni) *$A \subset \mathbb{R}$ è aperto se e solamente se per ogni $x \in A$ ogni successione che converge ad x appartiene ad A definitivamente. $F \subset \mathbb{R}$ è chiuso se e solamente il limite di ogni successione convergente a valori in F appartiene ad F.*

Definizione 7.3 *Sia $E \subset \mathbb{R}$. La* parte interna *di E è l'insieme*

$$\overset{\circ}{E} := \bigcup_{\substack{A \subset E \\ A\, aperto}} A.$$

La chiusura *di E è l'insieme*

$$\overline{E} := \bigcap_{\substack{F \supset E \\ F\, chiuso}} F.$$

Quindi la parte interna di E è un aperto (il più grande aperto contenuto in E), mentre la chiusura di E è un chiuso (il più piccolo chiuso che contiene E). Vale $\overset{\circ}{E} \subset E \subset \overline{E}$.

Esercizio 7.1 *Dimostrare le seguenti caratterizzazioni di parte interna e chiusura*

$$\overset{\circ}{E} = \{x \in E \mid E \text{ intorno di } x\} = \{x \in E \mid \exists \epsilon > 0 \text{ tale che }]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset E\},$$
$$\overline{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall U \text{ intorno di } x \text{ risulta } U \cap E \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \epsilon > 0,\ ]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap E \neq \emptyset\}.$$

Soluzione. Il punto x appartiene ad $\mathring{E}$ se e soltanto se appartiene ad un aperto contenuto in E, se e soltanto se E è un intorno di x, se e soltanto se esiste $\epsilon > 0$ tale che $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset E$.

Il punto x *non* appartiene ad $\overline{E}$ se e solamente se appartiene al complementare di un chiuso contenente E, se e solamente se esiste un intorno di x disgiunto da E, se e solamente se esiste $\epsilon > 0$ tale che $]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap E = \emptyset$. Quindi x appartiene ad $\overline{E}$ se e solamente se per ogni intorno U di x risulta $U \cap E \neq \emptyset$, se e solamente se per ogni $\epsilon > 0$ risulta $]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap E = \emptyset$. □

Esercizio 7.2 *Dimostrare che $x \in \mathring{E}$ se e solamente se ogni successione convergente ad x appartiene ad E definitivamente. Dimostrare che $x \in \overline{E}$ se e solamente se esiste una successione di elementi di E che converge a x.*

Soluzione. Se x appartiene ad $\mathring{E}$, per la Proposizione 7.2 ogni successione che converge ad x appartiene ad $\mathring{E}$ definitivamente ($\mathring{E}$ è aperto), e quindi ad E definitivamente. Viceversa, supponiamo che ogni successione che converge ad x appartiene ad E definitivamente e ragioniamo per assurdo: se x non appartenesse a $\mathring{E}$, per l'esercizio 7.1 per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ l'insieme $]x-1/n, x+1/n[\cap E^c$ sarebbe non vuoto, quindi potremmo trovare una successione $x_n \in]x-1/n, x+1/n[\cap E^c$, che quindi converge ad x ma i cui valori non appartiengono mai ad E.

Se $x \in \overline{E}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ l'insieme $]x-1/n, x+1/n[\cap E$ è non vuoto (esercizio 7.1), quindi detto x_n un elemento di tale insieme si ha che $x_n \in E$ ed (x_n) tende a x. Se viceversa x è il limite di una successione (x_n) a valori in E, allora in particolare $x_n \in \overline{E}$, e dal fatto che $\overline{E}$ è chiuso segue che $x \in \overline{E}$ (Proposizione 7.2). □

Esercizio 7.3 *Dimostrare le seguenti formule*

$$\overline{E} = (\mathring{\overbrace{E^c}})^c, \quad \mathring{E} = (\overline{E^c})^c.$$

Soluzione. Ricordiamo le formule

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Allora si ha

$$\overline{E}^c = \left(\bigcap_{\substack{F\supset E\\ F \text{chiuso}}} F\right)^c = \bigcup_{\substack{A\subset E^c\\ A\text{aperto}}} A = \mathring{\overbrace{E^c}},$$

$$\mathring{E}^c = \left(\bigcup_{\substack{A\subset E\\ A\text{aperto}}} A\right)^c = \bigcap_{\substack{F\supset E^c\\ F\text{chiuso}}} F = \overline{E^c},$$

e passando ai complementari si trovano le formule volute. □

Esercizio 7.4 *Dimostrare che* $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, *che* $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$, *ma che in generale l'inclusione è stretta.*

Dimostrare che $(A\overset{\circ}{\cap}B)=\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$, *che* $(A\overset{\circ}{\cup}B)\supset\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}$, *ma che in generale l'inclusione è stretta.*

Soluzione. L'insieme $\overline{A}\cup\overline{B}$ è chiuso e contiene $A\cup B$, quindi $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. D'altra parte, da $A\subset A\cup B$ (e $B\subset A\cup B$) segue che $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$ (e $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$). Quindi $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, e perciò vale l'uguaglianza.

L'insieme $\overline{A}\cap\overline{B}$ è chiuso e contiene $A\cap B$, quindi $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$. L'esempio $A=[0,1[$, $B=]1,2]$ mostra che l'inclusione può essere stretta.

Usando le formule dell'esercizio 7.3 e quanto dimostrato sopra si ha

$$(A\overset{\circ}{\cap}B)=(\overline{(A\cap B)^c})^c=(\overline{A^c\cup B^c})^c=(\overline{A^c}\cup\overline{B^c})^c=\overline{A^c}^c\cap\overline{B^c}^c=\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B},$$
$$(A\overset{\circ}{\cup}B)=(\overline{(A\cup B)^c})^c=(\overline{A^c\cap B^c})^c\supset(\overline{A^c}\cap\overline{B^c})^c=\overline{A^c}^c\cup\overline{B^c}^c=\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B},$$

come volevasi dimostrare. □

Definizione 7.4 *Un elemento* $x\in\mathbb{R}$ *si dice* punto di accumulazione *per* $E\subset\mathbb{R}$ *se ogni intorno di* x *contiene elementi di* E *diversi da* x *stesso. Equivalentemente, se per ogni* $\epsilon>0$ *l'insieme* $(]x-\epsilon,x+\epsilon[\cap E)\setminus\{x\}$ *è non vuoto. Un elemento* $x\in E$ *si dice* punto isolato *di* E *se non è punto di accumulazione per* E.

L'insieme dei punti di accumulazione è un chiuso. La chiusura di E è composta dall'unione (disgiunta) dei suoi punti di accumulazione e dei suoi punti isolati.

Proposizione 7.3 *Il punto* $x\in\mathbb{R}$ *è punto di accumulazione di* E *se e solamente se esiste una successione* $x_n\in E\setminus\{x\}$ *che converge ad* x.

Esercizio 7.5 *Determinare parte interna, chiusura, punti di accumulazione e punti isolati degli insiemi*

$$A=\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z}^+\right\},\quad B=\left\{\frac{m^2}{n^2}\mid m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{Z}^+\right\}.$$

Soluzione. La parte interna di A è ovviamente vuota.

Mostriamo che i punti di accumulazione di A sono tutti i soli i punti dell'insieme

$$H:=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}\mid k\in\mathbb{Z}^+\right\}.$$

Innanzitutto, è ovvio che tutti i punti di H sono punti di accumulazione di A: se U è un intorno di 0, allora il punto $2/n=1/n+1/n$ appartiene ad U per n sufficientemente grande; se V è un intorno di $1/k$ allora $1/k+1/n$ appartiene a V per n sufficientemente grande. Mostriamo che ogni $x\in\mathbb{R}$ punto di accumulazione di A è un punto dell'insieme H. Per la caratterizzazione della Proposizione 7.3, esiste una successione $(1/n_h+1/m_h)_{h\in\mathbb{N}}$ di punti di A che tende ad x ma che non prende il valore x. Allora necessariamente (n_h) oppure (m_h) è illimitata (altrimenti la successione prenderebbe un numero finito di valori, e quindi coinciderebbe con il suo limite x definitivamente). Supponendo ad esempio (m_h) illimitata e scelta (m_{k_h}) una sottosuccessione divergente si hanno due casi: se (n_{k_h}) è illimitata, necessariamente diverge, quindi $1/n_{k_h}+1/m_{k_h}\to 0$ e quindi $x=0$; se (n_{k_h}) è limitata, necessariamente è definitivamente uguale ad un certo n, quindi $1/n_{k_h}+1/m_{k_h}\to 1/n$ e $x=1/n$.

Dato che la chiusura di A è l'unione di A e dei suoi punti di accumulazione, $\overline{A}=A\cup\{0\}$ (gli ltri punti di H appartengono ad A). I punti isolati di A sono pertanto tutti i punti in $A\setminus H$, cioè i punti della forma $1/n+1/m$ tali che $n+m$ non divide nm.

Essendo composto da numeri razionali, l'insieme B ha parte interna vuota. Mostriamo che l'insieme dei punti di accumulazione di B è l'intervallo $[0,+\infty[$. Ovviamente, ogni punto di accumulazione deve stare in questo intervallo. Sia $x\geq 0$. Dato che i razionali sono densi in $\mathbb{R}$, possiamo trovare una successione di razionali positivi (n_h/m_h) che converge a $\sqrt{x}$ e che non prende il valore $\sqrt{x}$. Allora (n_h^2/m_h^2) è una successione di punti di B che converge ad x senza prendere mai il valore x.

Quindi la chiusura di B è anch'essa l'intervallo $[0,+\infty[$, e B non ha punti isolati. □

Esercizio 7.6 *Trovare un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ tale che i seguenti 7 insiemi risultino distinti:*

$$E,\quad \overline{E},\quad \mathring{\overline{E}},\quad \overline{\mathring{\overline{E}}},\quad \mathring{E},\quad \overline{\mathring{E}},\quad \mathring{\overline{\mathring{E}}}\,.$$

Dimostrare che continuando ad alternare parti interne e chiusure non se ne possono trovare di nuovi.

Soluzione. Un esempio è l'insieme

$$E=[0,1[\cup]1,2]\cup\{3\}\cup([4,5]\cap\mathbb{Q}),$$

per cui

$$\overline{E}=[0,2]\cup\{3\}\cup[4,5],\quad \mathring{\overline{E}}=]0,2[\cup]4,5[,\quad \overline{\mathring{\overline{E}}}=[0,2]\cup[4,5],$$
$$\mathring{E}=]0,1[\cup]1,2[,\quad \overline{\mathring{E}}=[0,2],\quad \mathring{\overline{\mathring{E}}}=]0,2[.$$

Proseguendo in questo modo non si possono trovare insiemi nuovi per il seguente motivo. Se F è la chiusura di un aperto, allora la chiusura della parte interna di F coincide con F. Se A è la parte interna di un chiuso, allora la parte interna della chiusura di A coincide con A. Dimostriamo la prima affermazione. Per ipotesi $F=\overline{A}$ con A aperto. Dato che $A\subset F$ è un aperto, si ha $A\subset\mathring{F}$, e prendendo le chiusure $F=\overline{A}\subset\overline{\mathring{F}}$. D'altra parte, essendo $F\supset\mathring{F}$ un chiuso, $F\supset\overline{\mathring{F}}$. Concludiamo che $F=\overline{\mathring{F}}$. La seconda affermazione si dimostra in modo analogo, oppure si può dedurre dalla prima passando ai complementari. Se infatti $A=\mathring{F}$ con

F chiuso, si ha $A^c = \overline{F^c}$, quindi A^c è la chiusura di un aperto, e per la prima affermazione $\overline{\mathring{A^c}} = A^c$. Ma il primo insieme è uguale a $\overline{\overline{A}^c}$, che a sua volte è uguale a $(\mathring{\overline{A}})^c$. Concludiamo che $A = \mathring{\overline{A}}$. $\square$