6 Settimana 31 ottobre - 4 novembre

Esercizio 6.1 *Esprimere* $1/(1-x)^3$ *in serie di potenze, per* $x \in]-1,1[$.

Soluzione. Abbiamo già visto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2},$$

e che in entrambi i casi la convergenza è assoluta per $x \in]-1,1[$. Il prodotto alla Cauchy di queste due serie converge quindi assolutamente per $x \in]-1,1[$ ed ha somma $1/(1-x)^3$. Il coefficiente n-esimo di tale prodotto alla Cauchy è

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Quindi

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n, \quad \forall x \in]-1,1[.$$

□

Esercizio 6.2 *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n,$$

per $-1 < x < 1$.

Soluzione. Abbiamo già visto che per ogni $x \in]-1,1[$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$

e che la convergenza è assoluta. Usando il risultato dell'Esercizio 6.1, si ha anche

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n + \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Mettendo assieme queste formule si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x} = \frac{2 - 3x(1-x) - 2(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

□

6.1 L'esponenziale reale (dagli appunti di P. Majer)

Riepiloghiamo brevemente i passi che portano alla definizione e allo studio delle proprietà della funzione esponenziale reale.

(0). *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ *converge assolutamente per ogni* $x \in \mathbb{R}$. □

Infatti la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n/n!$ converge per il criterio del rapporto.

(1). *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$*, la successione*

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

è definitivamente crescente. Più precisamente, è crescente se $x \geq 0$ *ed è crescente per* $n \geq -x$ *se* $x < 0$.

Dato $n \geq -x$, si considerano gli $n+1$ numeri non negativi,

$$1, 1+\frac{x}{n}, \ldots, 1+\frac{x}{n} \text{ (n volte).}$$

La loro media gemetrica ed aritmetica sono rispettivamente

$$G = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}, \quad A = \frac{1}{n+1}(1+n+x) = 1+\frac{x}{n+1}.$$

Dalla disuguaglianza aritmetico-geometrica $G \leq A$ segue $G^{n+1} \leq A^{n+1}$, cioè

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1},$$

come volevasi dimostrare. □

(2). *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$*, la successione*

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

è limitata superiormente.

Infatti, dallo sviluppo del binomio si ha

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k k!}|x|^k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}|x|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} < +\infty,$$

per il punto (0). □

Definizione 6.1 *Il numero e è definito come il limite*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Più in generale, la funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ *è definita come il limite*

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Questa funzione si indica anche come $\exp(x)$.

(3). *Si ha* $e^x > 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^x \geq 1$ *per ogni* $x \geq 0$, $e^x \leq 1$ *per ogni* $x \leq 0$.

Tutto segue immediatamente dalla definizione e dalla crescenza della successione che definisce e^x. □

(4). *Per ogni coppia di numeri reali* $y > x$ *valgono le disuguaglianze*

$$e^x(y-x) \leq e^y - e^x \leq e^y(y-x).$$

Dalla formula $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ segue

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{y-x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{y}{n}\right)^k\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1-k}.$$

Supponiamo n cosí grande che $1 + x/n$ - e quindi anche $1 + y/n$ - sia positivo. Al secondo membro troviamo il numero positivo $(y-x)$ moltiplicato la media di n numeri positivi compresi tra $(1+x/n)^{n-1}$ e $(1+y/n)^{n-1}$. Quindi

$$(y-x)\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1+\frac{y}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq (y-x)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n-1},$$

e passando al limite per $n \to \infty$ si ottengono le disuguaglianze volute. □

(5). *La funzione* $x \mapsto e^x$ *è strettamente crescente.*

Infatti per $y > x$ da (4) si ha $e^y - e^x \geq e^x(y-x) > 0$. □

Definizione 6.2 *Sia* $A \subset \mathbb{R}$. *Una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *si dice Lipschitziana se esiste* $c \geq 0$ *tale che*

$$|f(y) - f(x)| \leq c|y-x|, \quad \forall x, y \in A.$$

Il numero c *si dice costante di Lipschitz per* f, *ed* f *si dice anche* c*-Lipschitziana.*

La funzione $x \mapsto |x|$ è 1-Lipscitziana. Infatti

$$||y| - |x|| \leq |y-x|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

La funzione $x \mapsto x^2$ non è Lipschitziana su $\mathbb{R}$. Infatti

$$|(n+1)^2 - n^2| = 2n+1 \to +\infty \quad \text{per } n \to \infty,$$

e quindi non può valere $|(n+1)^2 - n^2| \leq c$ per nessun c.

Esercizio 6.3 *Dimostrare che la funzione* $x \mapsto x^2$ *è Lipschitziana su* $[-a, a]$, *per ogni* $a > 0$.

Soluzione. Infatti se $x, y \in [-a, a]$ vale

$$|y^2 - x^2| = |x + y|\,|x - y| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2a|x - y|,$$

da cui $x \mapsto x^2$ risulta $2a$-Lipschitziana su $[-a, a]$. $\square$

(6). *Se la successione (x_n) converge a $x \in \mathbb{R}$, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x.$$

Fissiamo $0 < \epsilon \leq 1$. Definitivamente $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$. Quindi definitivamente si ha

$$\left(1 + \frac{x - \epsilon}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x + \epsilon}{n}\right)^n.$$

Dato che i termini a sinistra e a destra convergono a $e^{x-\epsilon}$ e $e^{x+\epsilon}$ rispettivamente, si ha che

$$e^{x-\epsilon} - \epsilon < \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n < e^{x+\epsilon} + \epsilon$$

definitivamente. Dal punto (4) otteniamo quindi le stime

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n - e^x < e^{x+\epsilon} - e^x + \epsilon \leq \epsilon e^{x+1} + \epsilon,\\ \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n - e^x > e^{x-\epsilon} - e^x - \epsilon \geq -\epsilon e^x - \epsilon,\end{aligned}$$

definitivamente, il che prova che la successione data converge a e^x. $\square$

(7). *Per ogni coppia di numeri reali x, y vale $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$. In altre parole, la funzione $x \mapsto e^x$ è un omomorfismo dal gruppo $(\mathbb{R}, +)$ nel gruppo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. In particolare, $e^{-x} = 1/e^x$.*

Infatti

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{x + y + xy/n}{n}\right)^n.$$

Il primo membro tende a $e^x \cdot e^y$. Per il punto (6), l'ultimo membro tende a e^{x+y}. Da

$$1 = e^0 = e^{x-x} = e^{x+(-x)} = e^x \cdot e^{-x}$$

segue che $e^{-x} = 1/e^x$. $\square$

Esercizio 6.4 *Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $e^x \geq 1 + x$.*

Soluzione. Se $x = 0$ e $y > 0$ dalla prima disuguaglianza nella (4) segue $e^y - 1 \geq y$, ossia $e^y \geq y + 1$. Se $x < 0$ e $y = 0$ dalla seconda disuguaglianza nella (4) segue $1 - e^x \leq -x$, ossia $e^x \geq x + 1$. $\square$

Esercizio 6.5 *Dimostrare che se $x_n \neq 0$ è una successione che tende a 0 allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1.$$

Soluzione. Dimostriamo l'importante disuguaglianza

$$e^{-|x|} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Se $x > 0$, dalla disuguaglianza del punto (4) si ha

$$x = e^0(x-0) \leq e^x - e^0 = e^x - 1 \leq (x-0)e^x = xe^x,$$

e dividendo per il numero positivo x si ha

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x, \quad \forall x > 0,$$

che implica la (1) per $x > 0$. Se $x < 0$ dalla disuguaglianza del punto (4) si ha

$$-xe^x = e^x(-x) \leq e^0 - e^x = 1 - e^x \leq (-x)e^0 = -x,$$

e dividendo per il numero positivo $-x$ si ha

$$e^x \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1, \quad \forall x < 0,$$

che implica la (1) per $x < 0$.

Dalla (1) si ottiene

$$e^{-|x_n|} \leq \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \leq e^{|x_n|},$$

e dato che $x_n \to 0$ si ha che entrambe $e^{|x_n|}$ ed $e^{-|x_n|}$ tendono a 1. Per il teorema dei Carabinieri anche la successione data tende a 1. $\square$

Esercizio 6.6 *Dimostrare che* $\sup_{x\in\mathbb{R}} e^x = +\infty$, $\inf_{x\in\mathbb{R}} e^x = 0$.

Soluzione. Se n è un numero naturale si ha $e^n = e \cdot \ldots e$ n volte, e poichè $e = e^1 > e^0 = 1$ si ha che $e^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Quindi $\sup e^x = +\infty$. Dato che $e^{-n} = 1/e^n \to 0$ per $n \to +\infty$, otteniamo $\inf e^x = 0$. $\square$

Esercizio 6.7 *Determinare i limiti*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n+7}{5n-3}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Soluzione. Si ha

$$\left(\frac{5n+7}{5n-3}\right)^n = \left(\frac{5n-3+10}{5n-3}\right)^n = \left(1 + \frac{10}{5n-3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\frac{10}{5-3/n}\right)^n.$$

Dato che $10/(5-3/n)$ tende a $1/2$, per il punto (6) la prima successione tende a $e^{1/2} = \sqrt{e}$.

Dato che $(1+1/n)^n$ tende ad e che è maggiore di 1, fissato $\theta \in]1, e[$ si ha che $(1+1/n)^n > \theta$ definitivamente. Ma allora $(1+1/n)^{n^2} > \theta^n$ definitivamente e siccome $\theta^n \to +\infty$ troviamo che la seconda successione diverge positivamente.

Dato che $(1+1/n^2)^{n^2} < e$, si ha

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} < \sqrt[n]{e}.$$

Dal fatto che $\sqrt[n]{e} \to 1$ segue che la terza successione converge ad 1. □

(8). *La funzione $x \mapsto e^x$ è bigettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$. Concludiamo quindi che $x \mapsto e^x$ è un isomorfismo di gruppi da $(\mathbb{R},+)$ su $(\mathbb{R}^+,\cdot)$.*

Abbiamo già dimostrato che $x \mapsto e^x$ è strettamente crescente (punto (5)), quindi iniettiva. Ci resta da dimostrare che è surgettiva, cioè che dato $y > 0$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $e^x = y$. Dato che $e^{-x} = 1/e^x$, è sufficiente considerare il caso $y \geq 1$.

Sia quindi $y \geq 1$ e poniamo

$$x_n := n(\sqrt[n]{y} - 1),$$

in modo che

$$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = y.$$

Quindi

$$\left(1+\frac{x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = y = \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x_n}{n+1}\right)^{n+1},$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è usato il punto (1). Passando alle radice $n+1$-esime, questa disuguaglianza ci dice che (x_n) è decrescente. Dato che $x_n > 0$, deduciamo che (x_n) ha limite x. Per il punto (5),

$$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \to e^x.$$

Ma d'altra parte la quantità sopra vale identicamente y, quindi $e^x = y$, come richiesto. □

Definizione 6.3 *L'inversa della funzione esponenziale* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *si chiama logaritmo,* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$*, che risulta bigettivo e strettamente crescente.*

Esercizio 6.8 *Dimostrare che per ogni coppia $x, y \in \mathbb{R}^+$ si ha* $\log(xy) = \log x + \log y$.

Soluzione. Si ha

$$e^{\log x + \log y} = e^{\log x} e^{\log y} = xy,$$

da cui $\log xy = \log x + \log y$. □

Esercizio 6.9 *Dimostrare che per ogni $x > 0$ risulta* $\log x \leq x - 1$.

Soluzione. Dato che $e^y \geq 1 + y$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, si ha per $y = \log x$

$$\log x = y \leq e^y - 1 = e^{\log x} - 1 = x - 1.$$

□

Esercizio 6.10 *Dimostrare che per ogni $a > 0$ il logaritmo è Lipschitziano su $[a, +\infty[$.*

Soluzione. Siano $0 < x < y$, e poniamo $s = \log x$, $t = \log y$. Dalla prima disuguaglianza in (4) si ha

$$e^s(t-s) \leq e^t - e^s,$$

ossia

$$x(\log y - \log x) \leq y - x.$$

Quindi, se $0 < a < x < y$ si trova

$$|\log y - \log x| = \log y - \log x \leq \frac{1}{x}(y-x) = \frac{1}{x}|y-x| \leq \frac{1}{a}|y-x|,$$

che mostra che il logaritmo è $1/a$-Lipschitziano su $[a, +\infty[$. □

Esercizio 6.11 *Dimostrare che se $x_n \neq 0$ è una successione che tende a 0, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1.$$

Soluzione. Sia $y_n = \log(1+x_n)$. Dato che $x_n \to 0$, definitivamente $1 + x_n > 1/2$, e dato che il logaritmo è 2-Lipschitziano su $[1/2, +\infty[$ (Esercizio 6.10), si ha

$$|y_n| = |y_n - 0| = |\log(1+x_n) - \log 1| \leq 2|x_n|,$$

e quindi $y_n \to 0$. Dato che $1 + x_n = e^{y_n}$, si ha

$$\frac{\log(1+x_n)}{x_n} = \frac{y_n}{e^{y_n} - 1},$$

e questa successione tende ad 1 essendo il reciproco della successione studiata nell'Esercizio (6.5). □

Definizione 6.4 *Dato $a > 0$, si definisce la funzione esponenziale di base a come*

$$a^x := e^{x \log a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dalla proprietà (6) dell'esponenziale risulta che $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Inoltre $a^n = e^{n \log a} = e^{\log a} \dots e^{\log a} = a \dots a$ n volte. Infine, $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Infatti

$$\left(a^{1/n}\right)^n = \left(e^{1/n \log a}\right)^n = e^{\log a} = a.$$

Esercizio 6.12 *Sia $a > 0$. Dimostrare che se $x_n \neq 0$ è una successione che tende a 0, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \log a.$$

Soluzione. Si ha

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{e^{x_n \log a} - 1}{x_n} = \frac{e^{x_n \log a} - 1}{x_n \log a} \log a.$$

Dato che $x_n \log a \to 0$, la frazione all'ultimo membro tende a 1 per l'Esercizio 6.5, e quindi la successione data tende a $\log a$. □