2 Settimana 3-7 ottobre

Esercizio 2.1 *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ vale la disuguaglianza*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \frac{3}{4}.$$

Soluzione. Si noti che

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \sum_{h=2}^{n} \frac{1}{n+h} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{n+h} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{n+h} + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}.\end{aligned} \tag{1}$$

Supponendo solamente che l'ultima sommatoria sia minore di 3/4 non si può dunque dedurre che la prima sommatoria è minore di 3/4. Quindi dimostreremo per induzione una disuguaglianza più forte, del tipo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \frac{3}{4} - f(n), \tag{2}$$

con $f(n)$ funzione positiva da determinare. Per $n = 1$ la sommatoria vale 1/2, quindi $f(0)$ non deve superare 1/4. Da (1), supponendo la (2) vera si trova

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{n+h} + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \leq \frac{3}{4} - f(n) + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}.$$

Affinchè l'ultima quantità non superi $3/4 - f(n+1)$ è necessario e sufficiente che

$$f(n+1) \leq f(n) - \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}.$$

Provando f della forma $f(n) = 1/(an)$, la richiesta $f(0) \leq 1/4$ equivale a $a \geq 4$, e per $a = 4$ si trova

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n} = -\frac{1}{4n(n+1)} \leq -\frac{1}{2(n+1)(2n+2)}.$$

Quindi la funzione $f(n) = 1/(4n)$ va bene, e concludiamo che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4n},$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$. □

Esercizio 2.2 *Avendo definito $\mathbb{Q}$ come quoziente di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ per la relazione di equivalenza*

$$(a,b) \sim (c,d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad = bc,$$

dimostrare che la relazione

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad \leq bc$$

è ben definita ed è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{Q}$.

Soluzione. Verifichiamo innanzitutto che sia una buona definizione, cioè che non dipenda dal rappresentante della classe di equivalenza. Se $[(a,b)] = [(a',b')]$ - ossia $ab' = a'b$ - $[(c,d)] = [(c',d')]$ - ossia $cd' = c'd$ - e $ad \leq bc$, risulta

$$a'd'bcc' = ab'c'^2 d \leq bcb'c'^2,$$

dove abbiamo usato il fatto che $b'c'^2 \geq 0$. Supponiamo che c - e quindi anche c' - non sia nullo. Dato che c e c' hanno lo stesso segno, possiamo dividere per il numero positivo bcc' e troviamo

$$a'd' \leq b'c',$$

come volevasi dimostrare. Se $c = c' = 0$ si ragiona in modo analogo.

La riflessività e l'anti-simmetria sono ovvie. Se $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ e $[(c,d)] \leq [(e,f)]$, cioè

$$ad \leq bc \quad \text{e} \quad cf \leq de,$$

si trova $adf \leq bcf \leq bde$, da cui $af \leq be$, cioè

$$[(a,b)] \leq [(e,f)],$$

il che dimostra la transitività. Il fatto che questa relazione d'ordine sia totale è ovvio. □

Esercizio 2.3 *Dimostrare che l'insieme*

$$A = \left\{ p \in \mathbb{Q} \mid p^2 \leq 5 \right\}$$

non ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$ (si risolva questo esercizio senza far uso dei numeri reali).

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che se $p, q \in \mathbb{Q}$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, allora $p \geq q$ se e solamente se $p^2 \geq q^2$. Pertanto, l'insieme dei maggioranti di A è

$$M = \left\{ q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0 \text{ e } q^2 \geq 5 \right\},$$

ed è non vuoto perché contiene ad esempio il numero 3. Supponiamo per assurdo che questo insieme abbia minimo $q \in \mathbb{Q}$. Dato che l'equazione $x^2 = 5$ non ha soluzioni razionali (lo si è dimostrato nella lezione del 27 settembre), risulta $q^2 > 5$. Troveremo un assurdo mostrando che esiste un razionale $p \geq 0$ tale che $5 < p^2 < q^2$, il che contraddice il fatto che q sia il minimo dell'insieme M.

Sia $n \in \mathbb{Z}^+$ cosí piccolo che

$$\frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} < q^2 - 5.$$

Sia m il piú piccolo numero naturale per cui $m^2/n^2 > 5$. Allora $(m-1)^2/n^2 \le 5 < 9$, da cui $(m-1)/n < 3$ e quindi

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{(m-1)^2}{n^2} + \frac{2}{n}\frac{m-1}{n} + \frac{1}{n^2} < 5 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} < 5 + q^2 - 5 = q^2.$$

Concludiamo che $p = m/n$ è il razionale cercato. $\square$

Osservazione 2.1 *L'argomento usato sopra permette di dimostrare che i quadrati dei numeri razionali sono* densi in $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \ge 0\}$ *(cioè ogni intervallo aperto* $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $0 \le a < b$, *contiene almeno un quadrato di un razionale).*

Esercizio 2.4 *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo ordinato. Dimostrare i seguenti fatti:*

1. $x \le 0 \implies -x \ge 0$;
2. $x \le y \iff y - x \ge 0$;
3. $x \le y,\ z \le 0 \implies zx \ge zy$;
4. $x^2 \ge 0$.

Soluzione. (1) Infatti $x \le 0$ implica $0 = x + (-x) \le -x$, ossia $-x \ge 0$. (2) Infatti $0 = x + (-x) \le y + (-x) = y - x$. (3) Infatti, dato che $-z \ge 0$ si ha

$$x(-z) \le y(-z) \implies -zx \le -zy \implies zx \ge zy.$$

(4) Se $x \ge 0$ si moltiplicano ambo i membri per x ottenendo $x \cdot x \ge x \cdot 0 = 0$. Se $x \le 0$, si usa (3) per moltiplicare ambo i membri per x ottenendo $x \cdot x \ge x \cdot 0 = 0$. $\square$

Ricordiamo che il valore assoluto è definito come

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0, \\ -x & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Esercizio 2.5 *Si dimostrino i seguenti fatti:*

1. $|x| \le a \iff -a \le x \le a$;
2. $|x| \ge a \iff x \ge a$ *oppure* $x \le -a$;
3. $|x + y| \le |x| + |y|$;
4. $||x| - |y|| \le |x - y|$;
5. $\forall \epsilon > 0\ |x| \le \epsilon \implies x = 0$.

Soluzione. (1) Infatti se $x \geq 0$, $|x| \leq a$ equivale a $x \leq a$, mentre se $x \leq 0$, $|x| \leq a$ equivale a $-x \leq a$, cioè a $x \geq -a$. (2) Infatti se $x \geq 0$, $|x| \geq a$ equivale a $x \geq a$, mentre se $x \leq 0$, $|x| \geq a$ equivale a $-x \geq a$, cioè a $x \leq -a$. (3) Se x e y hanno lo stesso segno si trova l'uguaglianza. Se $x \geq 0$ e $y \leq 0$ distinguiamo due casi. Se $x + y \geq 0$, si ha

$$|x + y| = x + y \leq x = |x| \leq |x| + |y|,$$

mentre se $x + y \leq 0$,

$$|x + y| = -x - y \leq -y = |y| \leq |x| + |y|.$$

(4) Dalla (3) si trova

$$\begin{aligned} |x| - |y| &\leq |x - y| + |y| - |y| = |x - y|, \\ |x| - |y| &\geq |x| - (|y - x| + |x|) = |x - y|, \end{aligned}$$

e la tesi segue da (1). (5) Se per assurdo $x \neq 0$, possiamo scegliere $\epsilon = |x|/(1+1)$, ed ottenere $|x| \leq |x|/(1 + 1)$, e moltiplicando per il numero positivo $(1 + 1)/|x|$ si trova $1 + 1 \leq 1$, cioè $1 \leq 0$ assurdo. $\square$