5 Settimana 13 - 17 marzo

5.1 Integrali impropri

Definizione 5.1 *Sia* $a \in \mathbb{R}$ *e* $b \in [a, +\infty]$. *Una funzione* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *si dice* integrabile in senso improprio su $[a, b[$ *se per ogni* $s \in [a, b[$ *la funzione* f *è Riemann integrabile su* $[a, s]$ *ed esiste finito il limite*

$$\lim_{s \to b-} \int_a^s f(x)\, dx.$$

Il valore di tale limite di dice integrale improprio di f su $[a, b[$ *e si indica con* $\int_a^b f(x)\, dx$. *Si usa anche l'espressione* l'integrale di f su $[a, b[$ è convergente.

Analogamente nel caso di intervalli aperti a sinistra.

Esempio 5.1 *La funzione* $1/x^\alpha$, $\alpha > 0$, *è integrabile su* $]0, 1]$ *se e solamente se* $\alpha < 1$. *È integrabile su* $[1, +\infty[$ *se e solamente se* $\alpha > 1$.

Definizione 5.2 *Siano* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$. *Una funzione* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *si dice* integrabile in senso improprio su $]a, b[$ *se fissato* $c \in]a, b[$, f *è integrabile in senso improprio su* $]a, c]$ *e su* $[c, b[$. *In questo caso si pone*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

La definizione non dipende dalla scelta del punto c.

Analogamente si può definire l'integrale improprio per funzioni definite su un intervallo meno un insieme finito di punti.

Proposizione 5.1 (Confronto) *Siano* $a \leq b$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$. *Siano* $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *funzioni Riemann integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in* $]a, b[$. *Supponiamo inoltre* $0 \leq f \leq g$. *Allora:*

1. *Se* g *è integrabile anche* f *lo è.*

2. *Se* f *non è integrabile neanche* f *lo è.*

Proposizione 5.2 (Confronto asintotico) *Siano* $a \leq b$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$. *Siano* $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *funzioni Riemann integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in* $]a, b[$. *Supponiamo* $f, g \geq 0$ *e* g *integrabile. Se* $f = O(g)$ *per* $x \to a$ *e per* $x \to b$, *allora anche* f *è integrabile.*

Esempio 5.2 *La funzione* $\tan x$ *non è integrabile su* $]-\pi/2, \pi/2[$.

Infatti $\tan x \sim 1/(\pi/2 - x)$ per $x \to \pi/2-$, e questa funzione non è integrabile su $[0, \pi/2[$ per l'Esempio 5.1.

Esercizio 5.1 *Discutere la convergenza dell'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) dx.$$

Soluzione. La funzione $f(x) = 1/x - \sin 1/x$ è continua su $[1, +\infty[$, quindi è Riemann integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato ivi contenuto. Inoltre $f \geq 0$ e

$$f(x) = \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right), \quad \text{per } x \to +\infty.$$

In particolare,

$$f(x) \sim \frac{1}{6x^3}, \quad \text{per } x \to +\infty.$$

e dall'integrabilità di $1/x^3$ su $[1, +\infty[$ segue quella di f. □

Proposizione 5.3 *Siano $a \leq b$ in $\overline{\mathbb{R}}$, e sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $[a, b]$. Se $|f|$ è integrabile in senso improprio su $]a, b[$, allora anche f lo è e vale*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Dimostrazione. Fissiamo $c \in]a, b[$ e sia $s \in [c, b[$. Le funzioni

$$s \mapsto \int_c^s f^+(x)\, dx, \quad s \mapsto \int_c^s f^-(x)\, dx,$$

sono crescenti in s, e poichè $f^+(x) \leq |f(x)|$, $f^-(x) \leq |f(x)|$, esse sono limitate superiormente da

$$I := \int_c^b |f(x)|\, dx.$$

Quindi tali funzioni convergono per $s \to b-$ a due numeri non negativi I^+ ed I^- entrambi non superiori a $\int_c^b |f(x)|\, dx$. Quindi

$$\lim_{s \to b-} \int_c^s f(x)\, dx = \lim_{s \to b-} \left(\int_c^s f^+(x)\, dx - \int_c^s f^-(x)\, dx \right) = I^+ - I^- \in [-I, I],$$

il che mostra che f è integrabile su $[c, b[$ e vale

$$\left| \int_c^b f(x)\, dx \right| \leq \int_c^b |f(x)|\, dx.$$

Si ragiona in modo analogo sull'intervallo $]a, c]$, e si conclude. □

5.2 Criterio integrale per la convergenza di una serie

Proposizione 5.4 *Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e decrescente. Allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge se e solamente se l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Inoltre se $1 \leq n \leq m$ sono interi*

$$\int_n^{m+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=n}^{m} f(k) \leq \int_{n-1}^{m} f(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che essendo monotona, f è Riemann integrabile su ogni intervallo limitato contenuto in $[0, +\infty[$. Siano $1 \leq n \leq m$ interi. Allora dalla monotonia di f segue che

$$\int_n^{m+1} f(x)\, dx \leq S(f, \{n, \dots, m+1\}) = \sum_{k=n}^{m} f(k) = s(f, \{n-1, \dots, m\}) \leq \int_{n-1}^{m} f(x)\, dx.$$

La seconda disuguaglianza mostra che se f è integrabile allora la serie converge, la prima disuguaglianza mostra il viceversa. □

5.3 L'integrale di $\sin x/x$ su tutta la retta

Ricordiamo che la funzione $f(x) = \sin x/x$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}$, e che $|f(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. dato che f è una funzione pari, è sufficiente studiarla su $[0, +\infty[$.

Esercizio 5.2 *La funzione $f(x) = \sin x/x$ non è assolutamente integrabile su $[0, +\infty[$.*

Infatti $|\sin x| \geq 1/2$ su una successione di intervalli di ugual lunghezza con gli estremi che tendono a $+\infty$, e questo permette di stimare dal basso $\int_0^s |\sin x|/|x|\, dx$ con la somma parziale della serie armonica. Dato che la serie armonica diverge, anche l'integrale di $|\sin x|/x$ diverge.

Esercizio 5.3 *La funzione $f(x) = \sin x/x$ è integrabile su $[0, +\infty[$ e*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx,$$

Siano infatti $0 < a < b < +\infty$. La funzione $1 - \cos x$ è una primitiva di $\sin x$, quindi integrando per parti si trova

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{1 - \cos b}{b} - \frac{1 - \cos a}{a} + \int_a^b \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

La funzione $(1 - \cos x)/x^2$ è prolungabile con continuità in $x = 0$, in particolare è Riemann integrabile su $[0, b]$. Passando al limite per $a \to 0$ nell'espressione sopra troviamo quindi

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1 - \cos b}{b} + \int_0^b \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx.$$

Dato che $0 \leq (1-\cos x)/x^2 \leq 1/x^2$, la funzione $(1-\cos x)/x^2$ è integrabile su $[0,+\infty[$, perciò possiamo passare al limite per $b \to +\infty$, ottenendo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx,$$

come volevasi dimostrare.

Per calcolare il valore dell'integrale di $\sin x/x$ su $[0,+\infty[$, definiamo la funzione

$$g(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad t > 0.$$

Dato che

$$\left| e^{-tx}\frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-tx}$$

la funzione g è ben definita (è l'integrale improprio di una funzione integrabile) e

$$0 \leq g(t) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t},$$

il che mostra che

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0. \tag{1}$$

Passo 1. Dimostriamo che

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Scelti $0 < a < b < +\infty$, integrando per parti come sopra si trova

$$\int_a^b e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{e^{-tb}}{b}(1-\cos b) - \frac{e^{-ta}}{a}(1-\cos a) + \int_a^b e^{-tx}(tx+1)\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Passando al limite prima per $a \to 0$ e poi per $b \to +\infty$ deduciamo che

$$g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}(tx+1)\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} h(tx)\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx,$$

dove si è posto $h(s) := e^{-s}(s+1)$. Risulta $h(0) = 1$ e $h'(s) = -se^{-s}$, quindi h è decrescente e infinitesima per $s \to +\infty$. Risulta quindi $h(t) \leq h(0) = 1$, da cui

$$\int_0^{+\infty} h(tx)\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx,$$

ed è sufficiente dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste t_0 tale che per ogni $t \in]0, t_0]$ risulta

$$\int_0^{+\infty} (1-h(tx))\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx < \epsilon.$$

Sia $b > 0$ tale che
$$\int_b^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx < \frac{\epsilon}{2}.$$
Poniamo
$$c := \int_0^b \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$
Dato che $h(tb) \to 1$ per $t \to 0+$, esiste $t_0 > 0$ tale che $h(tb) > 1 - \epsilon/(2c)$ per ogni $t \in]0, t_0]$. Dato che h è decrescente, risulta $h(tx) > 1 - \epsilon/(2c)$ per ogni $x \in [0, b]$ e $t \in]0, t_0]$, da cui $1 - h(tx) < \epsilon/(2c)$ e quindi
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (1-h(tx))\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx &\leq \int_0^b (1-h(tx))\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \int_b^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \\ &< \frac{\epsilon}{2c}\int_0^b \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\end{aligned}$$
il che conclude la dimostrazione del Passo 1.

Passo 2. La funzione g è derivabile in $]0, +\infty[$ e la sua derivata è
$$g'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\,dx.$$

Fissiamo $t > 0$. Dobbiamo mostrare che il rapporto incrementale di g nel punto t, cioè
$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t+h)x} - e^{-tx}}{hx} \sin x\,dx,$$
tende per $h \to 0$ a
$$-\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\,dx.$$
Fissato $x > 0$, per il Teorema di Lagrange esiste ξ con $0 < |\xi| < |h|$ tale che
$$\left| \frac{e^{-(t+h)x} - e^{-tx}}{hx} + e^{-tx} \right| = \left| e^{-(t+\xi)x} - e^{-tx} \right| \leq |\xi x| \sup_\eta e^{-\eta} \leq |h| x e^{(t-|h|)x},$$
dove l'estremo superiore è fatto sulle η nell'intervallo di estremi tx e $(t+\xi)x$. Da questa stima ricaviamo
$$\left| \frac{g(t+h) - g(t)}{h} + \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\,dx \right| \leq |h| \int_0^{+\infty} x e^{-(t-|h|)x} \sin x\,dx.$$
Se scegliamo $|h| < t/2$ troviamo quindi
$$\left| \frac{g(t+h) - g(t)}{h} + \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\,dx \right| \leq |h| \int_0^{+\infty} x e^{-tx/2} \sin x\,dx,$$

e la quantità di destra è infinitesima per $h \to 0$. Abbiamo mostrato quindi che

$$g'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x \, dx,$$

come enunciato.

Passo 3. Risulta

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x \, dx = \frac{1}{1+t^2}.$$

Fissiamo $b > 0$. Integrando due volte per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-tx} \sin x \, dx &= \left[-e^{-tx} \cos x\right]_0^b - \int_0^b te^{-tx} \cos x \, dx \\ &= -e^{-tb} \cos b - 1 - t \left[e^{-tx} \sin x\right]_0^b - t \int_0^b te^{-tx} \sin x \, dx \\ &= -e^{-tb} \cos b - 1 - te^{-bt} \sin b - t^2 \int_0^b e^{-tx} \sin x \, dx.\end{aligned}$$

Passando al limite per $b \to +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x \, dx = -1 - t^2 \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x \, dx,$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x \, dx = \frac{1}{1+t^2},$$

come richiesto.

Conclusione. Per i Passi 2 e 3 la funzione g è derivabile su $]0, +\infty[$ con derivata

$$g'(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Quindi esiste una costante c tale che

$$g(t) = c - \arctan t.$$

Dato che $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$ (vedi (1)), la costante c vale $\pi/2$. Per il Passo 1,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \lim_{t\to 0+} g(t) = \lim_{t\to 0+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan t\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Dalla parità deduciamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \pi.$$

La funzione g considerata sopra è la *trasformata di Laplace* della funzione $\sin x/x$.

Esercizio 5.4 (Trasformata di Laplace)

1. *Sia* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che* $e^{-s_0 x} f(x) = O(1)$ *per* $x \to +\infty$, *per un certo* $s_0 \in \mathbb{R}$. *Mostrare che per ogni* $s > s_0$ *l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

è convergente. Il valore di questo integrale si indica con $(\mathcal{L}f)(s)$. *La funzione* $\mathcal{L}f :]s_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *si dice* trasformata di Laplace di f.

2. *Mostrare che*

$$(\mathcal{L}e^{ax})(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \forall s > a.$$

3. *Mostrare che*

$$(\mathcal{L}\cos ax)(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \forall s > 0.$$

4. *Mostrare che*

$$(\mathcal{L}x^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \forall s > 0.$$

5. *Dimostrare che sotto opportune ipotesi su* f *vale*

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2(\mathcal{L}f)(s) - sf(0) - f'(0).$$

Soluzione. 1. Dall'ipotesi di continuità e dal controllo per $x \to +\infty$, segue che $e^{-s_0 x} f(x)$ è limitata per $x \in [0, +\infty[$. Quindi per ogni $s > s_0$ la funzione

$$e^{-sx}|f(x)| = e^{-(s-s_0)x} e^{-s_0 x}|f(x)| \le c e^{-(s-s_0)x}$$

risulta integrabile su $[0, +\infty[$. Perciò $e^{-sx} f(x)$ è assolutamente integrabile e quindi integrabile su tale intervallo.

2. Osserviamo innanzitutto che la funzione e^{ax} verifica la condizione del punto 1 con $s_0 = a$. Quindi la sua trasformata di Laplace è ben definita su $]a, +\infty[$. Determiniamola: se $s > a$ risulta

$$(\mathcal{L}e^{ax})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{ax}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)x}\, dx = \frac{1}{s-a}.$$

3. Osserviamo innanizitutto che la funzione $\cos ax$ verifica la condizione del punto 1 con $s_0 = 0$. Quindi la sua trasformata di Laplace è ben definita su $]0, +\infty[$. Per $s > 0$ si trova, integrando due volte per parti

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\cos ax)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos ax\, dx = \left[\frac{1}{a} e^{-sx} \sin ax\right]_0^{+\infty} + \frac{s}{a} \int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin ax\, dx \\ &= \frac{s}{a}\left[-\frac{1}{a} e^{-sx} \cos ax\right]_0^{+\infty} - \frac{s^2}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos ax\, dx = \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2} (\mathcal{L}\cos ax)(s),\end{aligned}$$

da cui
$$(\mathcal{L}\cos ax)(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

4. Osserviamo innanizitutto che la funzione x^n verifica la condizione del punto 1 con $s_0 = 0$. Quindi la sua trasformata di Laplace è ben definita su $]0, +\infty[$. Fissato $s > 0$, integrando per parti si trova la regola ricorsiva

$$(\mathcal{L}x^n)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n \, dx = \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} x^n \right]_0^{+\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^{n-1} \, dx = \frac{n}{s} (\mathcal{L}x^{n-1})(s).$$

Dato che
$$(\mathcal{L}x^0)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \, dx = \frac{1}{s},$$
la regola ricorsiva sopra produce

$$(\mathcal{L}x^n)(s) = \frac{n}{s} (\mathcal{L}x^{n-1})(s) = \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} (\mathcal{L}x^{n-2})(s) = \frac{n!}{s^n} (\mathcal{L}x^0)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

5. Facciamo le ipotesi $f \in C^1([0, +\infty[)$, $e^{-s_0 x} f(x) = O(1)$ e $e^{-s_0 x} f'(x) = O(1)$ per $x \to +\infty$, in modo che le trasformate di Laplace di f e f' siano ben definite su $]s_0, +\infty[$. Integrando per parti si ottiene

$$(\mathcal{L}f')(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x) \, dx = \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} f'(x) \right]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) \, dx = -f(0) + s(\mathcal{L}f)(s),$$

come volevasi dimostrare. Nel secondo caso, chiediamo $f \in C^2([0, +\infty[)$, $e^{-s_0 x} f(x) = O(1)$, $e^{-s_0 x} f'(x) = O(1)$, e $e^{-s_0 x} f''(x) = O(1)$ per $x \to +\infty$, in modo che le trasformate di Laplace di f, f' e f'' siano ben definite su $]s_0, +\infty[$. Da quanto dimostrato sopra segue che

$$(\mathcal{L}f'')(s) = s(\mathcal{L}f')(s) - f'(0) = s[s(\mathcal{L}f)(s) - f(0)] - f'(0) = s^2 (\mathcal{L}f)(s) - s f(0) - f'(0).$$

□