5 Settimana 24-28 ottobre

Esercizio 5.1 *Siano* $k \in \mathbb{Z}^+$ *e* $a_n \geq 0$. *Dimostrare che se* $a_n \to L$ *allora* $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{L}$.

Soluzione. Dimostriamo innanzitutto la disuguaglianza

$$\sqrt[k]{x+y} \leq \sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Dato che la funzione $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ è crescente, questa disuguaglianza è equivalente a

$$x + y \leq \left(\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y}\right)^k,$$

che segue dallo sviluppo del binomio.

Osserviamo che da $a_n \geq 0$ segue che $L \geq 0$. Trattiamo il caso $L > 0$, lasciando il caso $L = 0$ al lettore. Sia $\epsilon > 0$. Dato che $a_n \to \epsilon$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$L - \epsilon^k < a_n < L + \epsilon^k, \quad \forall n \geq n_0.$$

Scegliendo $\epsilon < \sqrt[k]{L}$, possiamo assumere che $L - \epsilon^k$ sia positivo. Dalla (1) segue allora

$$\sqrt[k]{a_n} < \sqrt[k]{L + \epsilon^k} \leq \sqrt[k]{L} + \epsilon, \quad \sqrt[k]{a_n} > \sqrt[k]{L - \epsilon^k} \geq \sqrt[k]{L} - \epsilon,$$

per ogni $n \geq n_0$, come volevasi dimostrare. □

Esercizio 5.2 *Dimostrare le seguenti implicazioni:*

1. *se* $a_n \to +\infty$ *e* (b_n) *è limitata inferiormente, allora* $a_n + b_n \to +\infty$;
2. *se* $a_n \to -\infty$ *e* (b_n) *è limitata superiormente, allora* $a_n + b_n \to -\infty$;
3. *se* $a_n \to +\infty$ *allora* $1/a_n \to 0$;
4. *se* $a_n \to 0$ *e* $a_n > 0$, *allora* $1/a_n \to +\infty$;
5. *se* $a_n \to 0$ *e* $a_n < 0$, *allora* $1/a_n \to -\infty$;
6. *se* $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \to L$ *con* $L > 0$ *allora* $a_n b_n \to +\infty$;
7. *se* $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \to L$ *con* $L < 0$ *allora* $a_n b_n \to -\infty$.

Soluzione.

1. Per ipotesi $b_n \geq B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $M \in \mathbb{R}$. Dato che (a_n) diverge, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ risulta $a_n \geq M - B$. Ma allora per $n \geq n_0$ risulta anche

   $$a_n + b_n \geq a_n + B \geq M - B + B = M,$$

   e quindi $a_n + b_n \to +\infty$.

2. Segue dall'enunciato precedente applicato a $(-a_n)$ e $(-b_n)$.

3. Sia $\epsilon > 0$. Dato che $a_n \to +\infty$, $a_n > 1/\epsilon$ definitivamente. In particolare $a_n > 0$ definitivamente, e l'ultima affermazione è equivalente a $1/a_n < \epsilon$ definitivamente.

4. Sia $M > 0$. Dato che $a_n > 0$ e $a_n \to 0$, definitivamente si ha $0 < a_n < 1/M$. Ma questo è equivalente a $a_n > M$ definitivamente.

5. Segue dall'enunciato precedente applicato a $(-a_n)$.

6. Dal fatto che $b_n \to L$ con $L > 0$ segue che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $b_n \geq L/2$ per ogni $n \geq n_0$. Sia $M \in \mathbb{R}$. Dal fatto che $a_n \to +\infty$ segue che esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq 2M/L$ per ogni $n \geq n_1$. Se $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ si ha quindi

$$a_n b_n \geq a_n \frac{L}{2} \geq \frac{2M}{L}\frac{L}{2} = M,$$

e quindi $a_n b_n \to +\infty$.

7. Segue dall'enunciato precedente applicato a $(-b_n)$.

□

Esercizio 5.3 *Determinare il limite delle seguenti successioni*

$$\frac{x^n}{n^k},\ x > 1,\ k \in \mathbb{Z}^+; \quad \frac{n!}{n^n}; \quad \frac{x^n}{n!},\ x > 1; \quad \sqrt[n]{x},\ x > 0; \quad \sqrt[n]{n^k},\ k \in \mathbb{Z}^+; \quad \sqrt[n]{n!}.$$

Soluzione.

1. Sia $a_n = x^n/n^k$, con $x > 1$ e $k \in \mathbb{Z}^+$. Allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = x\frac{n^k}{(n+1)^k} = x\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-k}.$$

Dato che $1 + /n \to 1$, anche $(1 + 1/n)^k \to 1$, e quindi anche $(1 + 1/n)^{-k} \to 1$. Pertanto $a_{n+1}/a_n \to x$. Dato che $x > 1$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \theta := \frac{1+x}{2} > 1.$$

Per induzione deduciamo che

$$a_{n_0+h} \geq \theta^h a_{n_0}, \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Dato che $\theta > 1$, la successione $(a_{n_0}\theta^h)_{h\in\mathbb{N}}$ diverge, e per confronto diverge anche $(a_{n_0+h})_{h\in\mathbb{N}}$, e quindi (a_n). Conludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n^k} = +\infty.$$

2. Risulta
$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \leq \frac{1}{n},$$
poichè al numeratore dell'ultima frazione c'è un prodotto di $n-1$ termini ciascuno dei quali non supera il corrisipondente termine nel prodotto di $n-1$ termini al denominatore. La successione $(1/n)$ tende a zero, e per il teorema dei Carabinieri concludiamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

3. Sia $m \in \mathbb{Z}^+$ un intero maggiore di x, ad esempio $m = [x] + 1$. Allora se $n > m$ si ha
$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{x^{n-m-1}}{(m+1) \cdot (m+2) \cdots (n-1)} \cdot \frac{x}{n}.$$
La frazione al centro è minore di 1, poichè al numeratore c'è un prodotto di $n-m-1$ termini ciascuno dei quali è minore di ognuno degli $n-m-1$ termini nel prodotto al denominatore. Quindi
$$\frac{x^n}{n!} \leq \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{x}{n},$$
e dato che la successione di destra tende a zero per $n \to \infty$, deduciamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

4. Trattiamo il caso $x \geq 1$. Il caso $0 < x < 1$ si riconduce a questo considerando $1/x$. Dal fatto che la funzione $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ è crescente segue che $\sqrt[n]{x} \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$. Dimostriamo che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \inf_{n\in\mathbb{Z}^+} \sqrt[n]{x} = 1.$$
Per assurdo, esiste $\theta > 1$ tale che per infiniti $n \in \mathbb{N}$ risulta $\sqrt[n]{x} \geq \theta$. Ma questo è equivalente a $x \geq \theta^n$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$, il che è una contraddizione poichè $\theta^n \to +\infty$.

5. Dal fatto che la funzione $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ è crescente segue che $\sqrt[n]{n^k} \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$. Dimostriamo che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \inf_{n\in\mathbb{Z}^+} \sqrt[n]{n^k} = 1.$$
Per assurdo, esiste $\theta > 1$ tale che per infiniti $n \in \mathbb{N}$ risulta $\sqrt[n]{n^k} \geq \theta$. Ma questo è equivalente a $n^k \geq \theta^n$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$, ossia a
$$\frac{\theta^n}{n^k} \leq 1 \text{ per infiniti } n \in \mathbb{N}.$$
Ma l'ultima affermazione contraddice il fatto che $\theta^n/n^k \to +\infty$, come dimostrato in 1).

6. Per ogni $M > 1$ risulta
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{M^n} = +\infty,$$
come dimostrato in 3). In particolare, si ha che $n! \geq M^n$ definitivamente. Quindi $\sqrt[n]{n!} \geq M$ definitivamente, perciò
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$
$\square$

Definizione 5.1 *Una successione reale* (a_n) *si dice* successione di Cauchy *se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n \geq n_0$ *ed* $m \geq n_0$ *risulta* $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Esercizio 5.4 *Dimostrare che ogni successione di Cauchy è limitata.*

Soluzione. Sia (a_n) una successione di Cauchy. Per la proprietà di Cauchy, esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ e $m \geq n_0$ risulta $|a_n - a_m| < 1$. In particolare, per ogni $n \geq n_0$ si ha
$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|,$$
il che mostra che l'insieme $\{a_n \mid n \geq n_0\}$ è limitato. Ma l'insieme $\{a_n \mid n < n_0\}$ è finito, dunque è limitato (addirittura ammette massimo). Concludiamo che l'insieme $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limtato, ossia che la successione (a_n) è limitata. $\square$

Esercizio 5.5 *Dimostrare che se la successione* (a_n) *è di Cauchy e possiede una sottosuccessione* (a_{k_n}) *convergente, allora* (a_n) *converge.*

Soluzione. Sia $\epsilon > 0$. Dato che (a_n) è di Cauchy, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < \epsilon/2$ per ogni $n \geq n_0$ ed $m \geq n_0$. Dato che $(a_{k_n}) \to L$, esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_1$ risulta $|a_{k_n} - L| < \epsilon/2$. Dato che la successione di naturali (k_n) diverge, possiamo trovare un $h \geq n_1$ tale che $k_h \geq n_0$. Per ogni $n \geq n_0$ si ha pertanto
$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{k_h}| + |a_{k_h} - L| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$
e (a_n) converge a L. $\square$

Esercizio 5.6 (Criterio di Leibniz) *Sia* (a_n) *una successione decrescente ed infinitesima di numeri positivi. Dimostrare che la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *è convergente.*

Soluzione. Sia $s_k := \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$ la somma parziale k-esima. Dall'espressione
$$s_{2k} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2k-1} - a_{2k})$$
e dal fatto che (a_n) è decrescente segue che la successione (s_{2n}) è decrescente. Dall'espressione
$$s_{2k} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2k-2} - a_{2k-1}) + a_{2k}$$

e dal fatto che (a_n) è decrescente segue che $s_{2k} \geq 0$. Essendo decrescente e limitata inferiormente, la successione (s_{2k}) ha limite finito S. Dato che

$$s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2n+1},$$

dal fatto che $s_{2k} \to S$ e $a_{2n+1} \to 0$ segue che anche (s_{2k+1}) tende a S. Concludiamo che (s_k) tende a S. □

Esercizio 5.7 *Studiare la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, dove*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \textit{se } n \textit{ è pari}, \\ -\frac{1}{n^2} & \textit{se } n \textit{ è dispari}. \end{cases}$$

Soluzione. Si noti che questa serie verifica tutte le ipotesi del Criterio di Leibniz tranne il fatto che la successione dei valori assoluti dei suoi termini sia decrescente.

Ricordiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge, ed indichiamo con S la sua somma. Quindi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} a_n &= \sum_{\substack{0\leq n\leq k \\ n \text{ pari}}} \frac{1}{n+1} - \sum_{\substack{0\leq n\leq k \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n^2} \geq \sum_{\substack{0\leq n\leq k \\ n \text{ pari}}} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \\ &\geq \sum_{\substack{0\leq n\leq k \\ n \text{ pari}}} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{0\leq n\leq k \\ n \text{ pari}}} \frac{1}{n+1} - S.\end{aligned}$$

Dato che la serie armonica diverge, per confronto si ottiene facilmente che la successione

$$\sum_{\substack{0\leq n\leq k \\ n \text{ pari}}} \frac{1}{n+1}$$

diverge per $k \to +\infty$, e quindi la serie data diverge. □