4 Settimana 6 - 10 marzo

4.1 Lo spazio Euclideo

Dati $u, v \in \mathbb{R}^n$ il loro *prodotto scalare Euclideo* è il numero reale

$$u \cdot v := \sum_{j=1}^{n} u_j v_j.$$

La *norma Euclidea* del vettore $u \in \mathbb{R}^n$ è il numero non negativo

$$|u| := \sqrt{u \cdot u} = \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^2 \right)^{1/2}.$$

Osservazione 4.1 *Se identifichiamo $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ tramite l'applicazione $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ si ha*

$$\begin{aligned} u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (\operatorname{Re} u)(\operatorname{Re} v) + (\operatorname{Im} u)(\operatorname{Im} v) = \operatorname{Re}(u\overline{v}), \\ |u|^2 = u \cdot u = \operatorname{Re}(u\overline{u}) = |u|^2. \end{aligned}$$

Nell'ultima idenitità il primo $|u|$ è la norma Euclidea in $\mathbb{R}^2$ e l'ultimo $|u|$ è il modulo del numero complesso, ma l'identità mostra che questi due numeri sono uguali e giustifica l'uso dello stesso simbolo.

Proposizione 4.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ risulta $|u \cdot v| \leq |u|\,|v|$, e vale l'uguaglianza se e solamente se u e v sono allineati.*

La norma Euclidea $|\cdot|$ verifica le properietà seguenti:

1. $|u| \geq 0$ e $u = 0$ se e solamente se $u = 0$;
2. $|\lambda u| = |\lambda|\,|u|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^n$;
3. $|u + v| \leq |u| + |v|$ (disuguaglianza triangolare).

Più in generale, una funzione reale $v \mapsto \|v\|$ su uno spazio vettoriale V con le proprietà (1), (2), (3) si dice una *norma su V*.

Esercizio 4.1 *Verificare che le funzioni seguenti sono norme:*

$$\text{su } \mathbb{R}^n: \quad |u|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |u_j|, \quad |u|_1 := \sum_{j=1}^{n} |u_j|,$$

$$\text{su } C^0([a,b], \mathbb{R}): \quad \|u\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |u(x)|, \quad \|u\|_1 := \int_a^b |u(x)|\, dx.$$

Soluzione. Le proprietà (1) e (2) della norma sono ovvie in tutti i casi (per la norma $\|\cdot\|_1$ su $C^0([a,b])$ si osservi che se una funzione *continua* non negativa ha integrale nullo allora deve essere identicamente nulla: altrimenti sarebbe maggiore di un certo $\epsilon > 0$ su un qualche intervallo aperto non vuoto, e il suo integrale sarebbe quindi positivo). Le disuguaglianze triangolari si verificano facilmente:

$$|u+v|_\infty = \max_{1\le j\le n} |u_j + v_j| \le \max_{1\le j\le n} (|u_j| + |v_j|) \le \max_{1\le j\le n} |u_j| + \max_{1\le j\le n} |v_j| = |u|_\infty + |v|_\infty,$$

$$|u+v|_1 = \sum_{j=1}^n |u_j + v_j| \le \sum_{j=1}^n (|u_j| + |v_j|) = |u|_1 + |v|_1,$$

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} (|f(x)| + |g(x)|) \\ &\le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,\end{aligned}$$

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)|\, dx \le \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)\, dx = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

□

4.2 Applicazioni a valori vettoriali

Sia $E \subset \mathbb{R}$ e sia $u : E \to \mathbb{R}$.

Definizione 4.1 *L'applicazione u si dice continua in $x_0 \in E$ se tutte le sue componenti u_j lo sono. Equivalentemente, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$ implica $|u(x) - u(x_0)| < \epsilon$.*

Un'applicazione continua da un intervallo in $\mathbb{R}^n$ si dice più semplicemente *curva*.

Definizione 4.2 *L'applicazione u si dice derivabile in $x_0 \in E$ se tutte le sue componenti u_j lo sono. Si indica con $u'(x_0)$ il vettore le cui componenti sono $u_j'(x_0)$. Equivalentemente,*

$$u(x_0 + h) - u(x_0) = hu'(x_0) + o(|h|) \quad \textit{per } h \to 0.$$

I teoremi di Rolle e di Lagrange non valgono cosí come enunciati per funzioni a valori reali: la funzione $u(t) = (\cos t, \sin t)$ assume valori identici per $t = 0$ e per $t = 2\pi$, ma la sua derivata $u'(t) = (-\sin t, \cos t)$ non si annulla mai. Vale però il seguente:

Teorema 4.2 (Teorema del valor medio) *Sia $u \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ derivabile in $]a,b[$. Allora*

$$|u(b) - u(a)| \le (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |u'(t)|.$$

Definizione 4.3 *Sia $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione limitata. Si dice che u è integrabile su $[a,b]$ se tutte le sue componenti u_j lo sono, e in questo caso si pone*

$$\int_a^b u(t)\,dt := \left(\int_a^b u_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b u_n(t)\,dt\right).$$

Teorema 4.3 *Se $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è integrabile, allora*

$$\left|\int_a^b u(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |u(t)|\,dt.$$

4.3 Lunghezza di una curva

Sia $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Se $T = \{a = t_0 < \cdots < t_k = b\} \in \mathcal{T}([a,b])$ è una suddivisione di $[a,b]$, poniamo

$$\ell(u,T) := \sum_{j=1}^{k} |u(t_j) - u(t_{j-1})|.$$

Se $T \subset T'$ risulta $\ell(u,T) \leq \ell(u,T')$.

Definizione 4.4 *La lunghezza della curva $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è il numero*

$$\ell(u) := \sup_{T \in \mathcal{T}([a,b])} \ell(u,T) \in [0,+\infty].$$

Proposizione 4.4 *1. $\ell(u) \geq |u(b) - u(a)|$.*

2. (Addittività) Se $a < b < c$, $\ell(u|_{[a,b]}) + \ell(u|_{[b,c]}) = \ell(u|_{[a,c]})$.

3. (Invarianza per riparametrizzazione) Se $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ è continua, monotona e surgettiva, allora $\ell(u \circ \varphi) = \ell(u)$.

Teorema 4.5 *Se $u \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\ell(u) := \int_a^b |u'(t)|\,dt < +\infty.$$

Corollario 4.6 (Lunghezza di un grafico) *Se $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ e $u(x) = (x, f(x))$, si ha*

$$\ell(u) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt.$$

Esempio 4.1 *La curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq a$, ha lunghezza*

$$\ell = \int_0^a \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^{\operatorname{settsinh} a} \cosh^2 t\,dt = \frac{1}{2}\left[\log(a + \sqrt{1+a^2}) + a\sqrt{1+a^2}\right],$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile $x = \sinh t$ e il fatto che la funzione inversa del seno iperbolico è la funzione

$$\operatorname{settsinh} y = \log(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Esempio 4.2 *La curva* $u(x) = (x, f(x))$, $0 \le x \le \pi$, *con*

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

ha lunghezza infinita.

Esercizio 4.2 *Determinare la lunghezza della curva* $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Soluzione. Risulta

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t,$$

da cui

$$\ell = 3a \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t|\, dt = \frac{3}{2} a \int_0^{2\pi} |\sin 2t|\, dt = \frac{3}{4} a \int_0^{4\pi} |\sin s|\, ds = 3a \int_0^{\pi} \sin s\, ds = 6a,$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile $2t = s$. □

Proposizione 4.7 *Se una curva è espressa in coordinate polari* (r, θ) *dall'equazione* $r = r(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, *con* $r : [\alpha, \beta] \to [0, +\infty[$ *di classe* C^1, *la sua lunghezza è*

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta.$$

Esercizio 4.3 *Determinare le lunghezze delle seguenti curve espresse in coordinate polari:*

$$\begin{array}{rcl} \textit{(cardioide)} & r = a(1 + \cos\theta), & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ \textit{(spirale logaritmica)} & r = e^{-a\theta}, & 0 \le \theta \le 2k\pi, \\ \textit{(spirale di Archimede)} & r = a\theta, & 0 \le \theta \le 2k\pi, \\ \textit{(spirale iperbolica)} & r = \frac{a}{\theta}, & 2\pi \le \theta \le 2k\pi, \end{array}$$

dove $a > 0$ *e* $k \in \mathbb{Z}^+$. *Nel caso della spirale logaritmica e della spirale iperbolica determinare il limite per* $k \to +\infty$ *(cioè la lunghezza dell'intera spirale).*

Soluzione. La lunghezza della cardioide è

$$\begin{aligned} a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = 2a \int_0^{2\pi} |\cos\theta/2|\, d\theta \\ &= 4a \int_0^{\pi} |\cos t|\, dt = 8a \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 8a[\sin t]_0^{\pi/2} = 8a. \end{aligned}$$

La lunghezza della spirale logaritmica è

$$\begin{aligned} \int_0^{2k\pi} \sqrt{2^{-2a\theta} + a^2 e^{-2a\theta}}\, d\theta = \sqrt{1 + a^2} \int_0^{2k\pi} e^{-a\theta}\, d\theta &= \sqrt{1 + a^2} \left[-\frac{1}{a} e^{-a\theta} \right]_0^{2k\pi} \\ &= \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (1 - e^{-2k\pi a}). \end{aligned}$$

Quindi il limite per $k \to \infty$ è $\sqrt{1+a^2}/a$. La lunghezza della spirale di Archimede è

$$a \int_0^{2k\pi} \sqrt{\theta^2+1}\, d\theta = \frac{a}{2}[t + \sinh t \cosh t]_0^{\operatorname{settsinh} 2k\pi}$$
$$= \frac{a}{2}[\log(2k\pi + \sqrt{1+4k^2\pi^2}) + 2k\pi\sqrt{1+4k^2\pi^2}],$$

(vedi Esempio 4.1). La lunghezza della spirale iperbolica è

$$a \int_{2\pi}^{2k\pi} \sqrt{\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^4}}\, d\theta = a \int_{2\pi}^{2k\pi} \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2}\, d\theta = a \int_\alpha^\beta \frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t}\, dt,$$

dove si è usato il cambio di variabile $\theta = \sinh t$ e si è posto

$$\alpha = \operatorname{settsinh} 2\pi = \log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}), \quad \beta = \operatorname{settsinh} 2k\pi = \log(2k\pi + \sqrt{1+4k^2\pi^2}).$$

Integrando per parti si trova

$$\int_\alpha^\beta \frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t}\, dt = \left[-\frac{\cosh t}{\sinh t}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left(-\frac{1}{\sinh t}\right) \sinh t\, dt = \frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} - \frac{\cosh\beta}{\sinh\beta} + \beta - \alpha.$$

Sostituendo i valori di α e β si trova che la lunghezza cercata è

$$a\left(\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} - \frac{\sqrt{1+4k^2\pi^2}}{2k\pi}\right) + a\log\frac{2k\pi + \sqrt{1+4k^2\pi^2}}{2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}}.$$

Questa lunghezza tande a $+\infty$ per $k \to +\infty$. $\square$

4.4 Prodotto infinito di Wallis

Iniziamo con il calcolare l'integrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si ha

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1.$$

Inoltre, integrando per parti

$$I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x\, dx$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1 - sin^2 x)\sin^{n-2} x\, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

da cui ricaviamo la formula ricorsiva

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Da questa formula e dalle formule per I_0 e I_1 concludiamo

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}, \quad I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

Dividendo I_{2n+1} per I_{2n} troviamo

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)},$$

da cui

$$\frac{\pi}{2} = \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}. \tag{1}$$

Dato che $0 \leq \sin x \leq 1$ su $[0, \pi/2]$, su tale intervallo $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$, da cui $I_{n+1} \leq I_n$. Quindi $I_{2n}/I_{2n+1} \geq 1$, ed usando la legge ricorsiva,

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \frac{I_{2n}}{I_{2n-1}} \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

Deduciamo che I_{2n}/I_{2n+1} tende a 1 per $n \to \infty$. Da (1) ricaviamo quindi:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}, \tag{2}$$

formula nota come *prodotto infinito di Wallis.*

Risulta

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}$$
$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) \cdot (2n+1)} (2n+1) = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k+1)^2},$$

ed estraendo la radice quadrata troviamo

$$\sqrt{\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}} = \sqrt{2n+1} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \sqrt{2n+1} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \frac{2k}{2k}$$
$$= \sqrt{2n+1} \frac{((2n)!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Dalla formula di Wallis ricaviamo quindi

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!},$$

dove si è usato il fatto che $\sqrt{n}/\sqrt{2n+1} \to 1/\sqrt{2}$. Troviamo quindi l'altra utile formula

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}. \tag{3}$$

4.5 Una formula per $\log(\mathbf{n+1})/\mathbf{n}$

Dallo sviluppo in serie di potenze di $\log(1+x)$ si ricava

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = 2 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{2h+1} x^{2h+1},$$

per ogni $x \in]-1,1[$. In particolare, per $x = 1/(2n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, si trova

$$\log \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{2h+1} \frac{1}{(2n+1)^{2h}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{4}$$

Esercizio 4.4 *1. Dimostrare che*

$$\log 2 = \frac{2}{3} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{2h+1} \frac{1}{9^h}.$$

2. *Dimostrare che la somma dei primi 9 termini nella serie sopra differisce da* $\log 2$ *per meno di* $2 \cdot 10^{-10}$.

3. *Determinare* $\alpha := 1/\log 10$ *con un errore inferiore a* 10^{-9}.

4. *Mostrare che la sequenza*

$$x_{1000} = 3, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{2\alpha}{2n+1},$$

fornisce una buona approssimazione dei logaritmi in base 10 *dei naturali maggiori di* 1000*, nel senso che* $|x_n - \log_{10} n| < 10^{-12}$ *per ogni intero* $n \geq 1000$.

Soluzione. 1. Basta applicare (4) con $n = 1$.

2. L'errore che si commette considerando i primi 9 termini è $2/3 \sum_{h=9}^{\infty} 1/(2h+1)1/9^h$. Questo numero si può stimare maggiorando $1/(2h+1)$ con $1/19$, ottenendo

$$\frac{2}{3}\sum_{h=9}^{\infty}\frac{1}{2h+1}\frac{1}{9^h} \leq \frac{2}{3}\frac{1}{19}\sum_{h=9}^{\infty}\frac{1}{9^h} = \frac{2}{3}\frac{1}{19}\frac{9}{8}\frac{1}{9^9} = \frac{3}{19\cdot 4}\left(\frac{10}{9}\right)^9\frac{1}{10^9}.$$

Dato che $(10/9)^9 = (1+1/9)^9 < e < 3$, l'ultima quantità si maggiora coem segue

$$\frac{3}{19\cdot 4}\left(\frac{10}{9}\right)^9\frac{1}{10^9} \leq \frac{9}{19\cdot 4}\frac{1}{10^9} < \frac{2}{10^9}.$$

Concludiamo che il numero

$$a := \frac{2}{3}\sum_{h=0}^{8}\frac{1}{2h+1}\frac{1}{9^h}$$

differisce da $\log 2$ per meno di $2\cdot 10^{-10}$.

3. Dalla formula (4) con $n = 4$ ricaviamo

$$\log\frac{5}{4} = \frac{2}{9}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{2h+1}\frac{1}{9^{2h}}.$$

Mostriamo che la somma dei primi 4 termini,

$$b := \frac{2}{9}\sum_{h=0}^{3}\frac{1}{2h+1}\frac{1}{9^{2h}},$$

differisce da $\log 5/4$ meno di $6\cdot 10^{-10}$. Infatti, stimando come prima si trova

$$\frac{2}{9}\sum_{h=4}^{\infty}\frac{1}{2h+1}\frac{1}{9^{2h}} \leq \frac{2}{9\cdot 11}\sum_{h=4}^{\infty}\frac{1}{9^{2h}} = \frac{2}{9\cdot 11}\frac{81}{80}\frac{1}{9^8} = \frac{2}{9\cdot 11}\frac{81}{80}\frac{9}{10}\left(\frac{10}{9}\right)^9\frac{1}{10^8}$$
$$\leq \frac{2}{9\cdot 11}\frac{81}{80}\frac{9}{10}3\frac{1}{10^8} < 6\cdot 10^{-10}.$$

Allora

$$|\log 10 - (b+3a)| = |\log 5/4 + 3\log 2 - (b+3a)| \leq |\log 5/4 - b| + 3|\log 2 - a| \leq 12\cdot 10^{-10}.$$

Posto quindi $\alpha_0 := 1/(b+3a)$ si ha

$$|\alpha - \alpha_0| = |1/\log 10 - 1/(b+3a)| = \frac{|\log 10 - (b+3a)|}{|\log 10|\,|b+3a|} \leq \frac{12\cdot 10^{-10}}{4} < 10^{-9},$$

dove si è usato il fatto che $\log 10 > 2$ e $b + 3a > 2$.

4. Iniziamo con l'osservare che

$$\log\frac{n+1}{n}-\frac{2}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{2h+1}\frac{1}{(2n+1)^{2h}}\leq\frac{2}{2n+1}\frac{1}{3}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2h}}$$
$$=\frac{2}{2n+1}\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2-1}<\frac{1}{n^3}.$$

Oseriviamo inoltre che

$$\log_{10}(n+1)=\log_{10}n+\log_{10}\frac{n+1}{n}=\log_{10}n+\alpha\log\frac{n+1}{n}.$$

Detto

$$\delta_n:=|x_n-\log_{10}n|,$$

si ha

$$\delta_{n+1}=|x_{n+1}-\log_{10}(n+1)|=\left|x_n+\frac{2\alpha}{2n+1}-\log_{10}n-\alpha\log\frac{n+1}{n}\right|$$
$$\leq\delta_n+\alpha\left|\frac{2}{2n+1}-\log\frac{n+1}{n}\right|.$$

Dunque

$$\delta_{n+1}\leq\delta_n+\alpha\frac{1}{n^3},$$

ed insieme al fatto che $\delta_{1000}=0$ si ha

$$\delta_n\leq\alpha\sum_{h=1000}^{n-1}\frac{1}{h^3},\qquad\forall n\geq 1000.$$

L'ultima somma si stima facilmente con l'integrale,

$$\sum_{h=1000}^{n-1}\frac{1}{h^3}\leq\int_{10^3-1}^{n-1}\frac{1}{x^3}\,dx=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x^4}\right]_{10^3-1}^{n-1}\leq\frac{1}{4}\frac{1}{(10^3-1)^4}<10^{-12}.$$

Quindi x_n differisce da $\log_{10}n$ meno di 10^{-12}. Sostituendo ad α il valore approssimato α_0 calcolato nei punti sopra si possono calcolare esplicitamente i logaritmi dei numeri interi. □

4.6 La formula di Stirling

In questa sezione vogliamo trovare una formula asintotica per $n!$ in termini di funzioni analitiche note. Iniziamo con l'osservare che

$$e^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}n^k\geq\frac{1}{n!}n^n,$$

da cui $n! \geq e^{-n}n^n$. Se consideriamo la suddivisione $T = \{1, 2, \dots, n\}$ dell'intervallo $[1, n]$, possiamo stimare dal basso l'integrale di $\log x$ su $[1, n]$ con la somma di Riemann inferiore relativa a T:

$$\int_1^n \log x \, dx \geq s(\log x, T) = \sum_{k=1}^{n-1} \log k = \log(n-1)!.$$

Integrando per parti si trova

$$\int_1^n \log x \, dx = [x \log x]_1^n - \int_1^n x \frac{1}{x} \, dx = n \log n - n + 1,$$

quindi $n \log n - n + 1 \geq \log(n-1)!$, e passando agli esponenziali

$$ee^{-n}n^n \geq (n-1)!,$$

da cui moltiplicando per n,

$$ee^{-n}n^{n+1} \geq n!. \tag{5}$$

Mettendo assieme le due stime trovate, abbiamo

$$e^{-n}n^n \leq n! \leq ee^{-n}n^{n+1}. \tag{6}$$

Esercizio 4.5 *Sfruttando il fatto che il logaritmo è una funzione concava, cioè* $\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \log x + (1-\lambda) \log y$ *per ogni* $x, y > 0$, $\lambda \in [0, 1]$, *migliorare la stima (5).*

Soluzione. La concavità del logaritmo ci assicura che per $x \in [k, k+1]$ la funzione $\log x$ è maggiore della funzione affine che vale $\log k$ in k e $\log(k+1)$ in $k+1$. Quindi l'integrale tra 1 e n di $\log x$ è maggiore dell'integrale sullo stesso intervallo della funzione il cui grafico è la spezzata per i punti $(k, \log k)$, $k \in \mathbb{Z}^+$. L'integrale su $[1, n]$ di questa funzione è la somma delle aree dei trapezi di altezza 1 e basi $\log k$ e $\log(k+1)$, $1 \leq k \leq n-1$, quindi

$$-n + 1 + n \log n = \int_1^n \log x \, dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(\log k + \log(k+1)) = \frac{1}{2}[\log(n-1)! + \log n!].$$

Passando agli esponenziali, troviamo

$$ee^{-n}n^n \geq \sqrt{(n-1)!n!} = \sqrt{n}(n-1)!,$$

e moltiplicando per n concludiamo che

$$n! \leq ee^{-n}n^{n+1/2}.$$

□

La doppia stima (6) suggerisce di cercare una stima asintotica per $n!$ del tipo

$$n! \sim ce^{-n}n^{n+\alpha},$$

con $c > 0$ e $\alpha \in [0, 1]$ da determinare. Dimostriamo infatti la seguente:

Proposizione 4.8 *Se $\alpha = 1/2$, la successione (a_n) è decrescente e converge ad un numero $c > 0$.*

Dimostrazione. Risulta

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} = e^{(n+1/2)\log(1+1/n)-1}.$$

Dalla formula (4) ricaviamo

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{2h+1}\frac{(2n+1)^{2h}}{.}$$

La somma dell'ultima serie può essere stimata dal basso con il suo primo termine, ossia 1, e dall'alto maggiorando $1/(2h+1)$ per $h \geq 1$ con $1/3$. Si ottiene cosí

$$1 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 + \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2h}} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

dove si è calcolata la somma della serie geometrica di ragione $1/(2n+1)^2$. Sottraendo 1 e passando agli esponenziali troviamo le disuguaglianze

$$1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq e^{1/(12n(n+1)} = \frac{e^{1/(12n)}}{e^{1/(12(n+1))}}.$$

La prima disuguaglianza ci dice che (a_n) è decrescente, quindi ha limite $c \in [0, +\infty[$. La sconda disuguaglianza ci dice che la successione $(e^{-1/(12n)}a_n)$ è crescente, quindi ha limite $c' \in]0, +\infty]$. Dato che $e^{-1/(12n)}$ tende a 1, deduciamo che $c' = c$ e quindi $c \in]0, +\infty[$, come si voleva dimostrare. Osserviamo inoltre che vale la stima

$$ce^{-n}n^{n+1/2} \leq n! \leq ce^{-n}n^{n+1/2}e^{1/(12n)}. \tag{7}$$

□

Abbiamo quindi dimostrato che

$$n! \sim ce^{-n}n^{n+1/2}.$$

Ci resta da calcolare la costante positiva c. Possiamo farlo facilmente grazie al prodotto infinito di Wallis nella forma (3). Infatti, sostituendo lo sviluppo asintotico per $n!$ in (3) troviamo

$$\sqrt{\pi} \sim \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} \sim \frac{c^2 e^{-2n} n^{2n+1} 2^{2n}}{ce^{-2n}(2n)^{2n+1/2} n^{1/2}} = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

da cui $c = \sqrt{2\pi}$. Abbiamo quindi dimostrato il seguente (vedi anche (7)):

Teorema 4.9 (Formula di Stirling) *Vale lo sviluppo asintotico*

$$n! = \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+1/2}.$$

Più precisamente, vale la stima

$$\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+1/2} \leq n! \leq \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+1/2}e^{1/(12n)}.$$