4 Settimana 17-21 ottobre

Esercizio 4.1 *Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ due cerchi di raggio 1 tangenti, e sia r una retta tangente ad entrambi. Sia $\mathcal{C}_1$ il cerchio tangente a $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ e a r, sia $\mathcal{C}_2$ il cerchio tangente $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ e a $\mathcal{C}_1$. Per induzione, sia $\mathcal{C}_n$ il cerchio tangente a $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}_{n-1}$. Dimostrare che il diametro di $\mathcal{C}_n$ è $1/n(n+1)$, ottenendo una interpretazione geometrica della formula*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Soluzione. Dimostriamo che la lunghezza dell'n-esimo raggio è $r_n = 1/(2n(n+1))$. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo avente per vertici il centro di $\mathcal{C}$, il centro di $\mathcal{C}_1$, ed il punto di tangenza tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, si ha $(1+r_1)^2 = 1+(1-r_1)^2$, da cui $r_1 = 1/4$. Ragionando per induzione, supponiamo che $r_k = 1/(2k(k+1))$ per ogni $k \leq n-1$. Allora dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo di vertici il centro di $\mathcal{C}$, il centro di $\mathcal{C}_n$, ed il punto di tangenza tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, si ha

$$(1+r_n)^2 = 1 + \left(1 - 2\sum_{k=1}^{n-1} r_k - r_n\right)^2. \tag{1}$$

Usando l'ipotesi induttiva si ha

$$2\sum_{k=1}^{n-1} r_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k=1}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Da (1) segue allora

$$(1+r_n)^2 = 1 + \left(\frac{1}{n} - r_n\right)^2,$$

che risolta in r_n fornisce $r_n = 1/(2n(n+1))$.

Esercizio 4.2 *(Curva di von Koch). Partendo da un triangolo equilatero di lato unitario, si divida in tre parti uguali ciascun lato e si costruisca un triangolo equilatero avente per lato la parte centrale di ogni lato ed esterno al triangolo di partenza. Si ripeta l'operazione sulle parti centrali dei 12 lati del poligono cosí ottenuto. Iterando indefinitamente il procedimento si genera una curva chiusa, detta curva di von Koch. Si verifichi che la lunghezza di tale curva è infinita, e si calcoli l'area da essa delimitata.*

Soluzione. Il triangolo iniziale ha area $A_0 = \sqrt{3}/2$. Al primo passo aggiungiamo triangoli aventi ciascuno area $A_1 = 1/9A_0$, al secondo passo triangoli aventi ciascuno area $A_2 = 1/9^2 A_0$. In generale all'n-esimo passo aggiungiamo triangoli aventi ciascuno area $1/9$ dell'area dei triangoli aggiunti al passo $(n-1)$-esimo, cioè $A_n = A_{n-1}/9$. Si trova quindi

$$A_n = \frac{A_0}{9^n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Contiamo adesso i triangoli aggiunti ad ogni passo. Inziamo con $N_0 = 1$ triangolo, al primo passo ne aggiungiamo $N_1 = 3$, al secondo $N_2 = 12$. In generale, al passo n-esimo aggiungiamo 4 triangoli per ogni triangolo del passo $(n-1)$-esimo. Quindi $N_n = 4 \cdot N_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$. Ricaviamo quindi

$$N_n = 3 \cdot 4^{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

L'area totale è data quindi dalla somma della serie

$$\begin{aligned} A = \sum_{n=0}^{\infty} N_n A_n &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{A_0}{9^n} \\ = A_0 \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right) &= A_0 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} \right) = \frac{8}{5} A_0 = \frac{4\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

Il perimetro del triangolo inziale è $P_0 = 3$, quello della figura ottenuta al primo passo è $P_1 = 4$. In generale all'n-esimo passo sottraiamo dal perimetro P_{n-1} un terzo del suo valore (eliminando i terzi centrali di ciascun lato) e gli agginugiamo due terzi del suo valore (ogni terzo eliminato è sostituito da due lati di uguale lunghezza). Quindi $P_n = P_{n-1} - P_{n-1}/3 + 2P_{n-1}/3 = (4/3)P_{n-1}$, da cui risulta

$$P_n = (4/3)^n P_0 = \frac{4^n}{3^{n-1}}, \quad \forall n \geq 0,$$

quindi la successione dei perimetri diverge.

Esercizio 4.3 *Sia $A \subset \mathbb{Z}^+$ l'insieme degli interi positivi nella cui rappresentazione decimale non compare la cifra 0. Mostrare che la famiglia dei reciproci dei numeri dell'insieme A è sommabile, cioè che*

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} < +\infty.$$

Soluzione. I numeri non contenenti la cifra 0 formati da una cifra sono 9, tutti non inferiori a 1. Poi ne abbiamo 9^2 di 2 cifre, tutti superiori a 10. In generale ne abbiamo 9^n di n-cifre, tutti superiori a 10^{n-1}. Quindi la somma dei loro reciproci è non superiore a

$$9 + \frac{9^2}{10} + \cdots + \frac{9^n}{10^{n-1}} + \cdots = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n-1}}{10^{n-1}} = 90.$$

Quindi la somma infinita data non supera 90.

Esercizio 4.4 *Studiare la somma infinita*

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+} \frac{1}{n^3 + m^3}.$$

Soluzione. Consideriamo la partizione $\{\Delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ di $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, dove

$$\Delta_k = \big\{(n,m)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+ \mid n+m=k+1\big\}$$

è la diagonale che unisce i punti $(k,1)$ e $(1,k)$. Per l'associatività delle somme infinite,

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+}\frac{1}{n^3+m^3} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^+}\sum_{(n,m)\in\Delta_k}\frac{1}{n^3+m^3}. \tag{2}$$

Osserviamo che dalla disuguaglianza $nm\le n^2/2+m^2/2$ segue

$$n^3+m^3=(n+m)(n^2-nm+m^2)\ge\frac{1}{2}(n+m)(n^2+m^2),\quad \forall n,m\ge 0.$$

La diagonale Δ_k dista $(k+1)/\sqrt{2}$ dall'origine, quindi per ogni $(n,m)\in\Delta_k$ risulta

$$n^2+m^2\ge\frac{(k+1)^2}{2}.$$

Insieme alla disuguaglianza sopra, questo implica

$$n^3+m^3\ge\frac{1}{2}(n+m)\frac{(k+1)^2}{2}=\frac{(k+1)^3}{4},\quad \forall (n,m)\in\Delta_k.$$

Dato che l'insieme Δ_k ha k elementi, deduciamo che

$$\sum_{(n,m)\in\Delta_k}\frac{1}{n^3+m^3}\le k\cdot\frac{4}{(k+1)^3}\le\frac{4}{(k+1)^2}.$$

Perciò

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^+}\sum_{(n,m)\in\Delta_k}\frac{1}{n^3+m^3}\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^+}\frac{4}{(k+1)^2}=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Dato che l'ultima serie è convergente, dalla (2) deduciamo che la famiglia assegnata è sommabile:

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+}\frac{1}{n^3+m^3}<+\infty.$$