Analisi IIA - Anno 2005/06 - Programma dettagliato

A. Abbondandolo - V. Magnani

- **Prodotti infiniti.** Sommabilità di $\{z_k\}$ e convergenza del prodotto infinito degli $\{1 + z_k\}$. Formula di prodotto infinito per la funzione seno. Calcolo della somma della serie $\sum_{k \geq 1} 1/k^2$.
- **Funzioni analitiche.** Criterio di Abel per serie complesse. Rappresentazione in serie di potenze delle funzioni $\log(1 + x)$ e $\arctan x$. Principio di identità delle funzioni analitiche reali. Risoluzione di equazioni differenziali tramite serie di potenze. Integrazione di funzioni analitiche.
- **Uniforme continuità.** Funzioni uniformemente continue. Teorema di Heine-Cantor. Modulo di continuità e sue proprietà.
- **Integrale di Riemann.** Suddivisioni di un intervallo limitato. Somme di Riemann di una funzione limitata. Integrale superiore ed inferiore. Funzioni integrabili secondo Riemann. Teorema: le funzioni continue sono integrabili. Linearità dell'integrale. La composizione $f \circ g$ con g integrabile e f continua è integrabile. Integrabilità di fg e di $|f|$. Addittività dell'integrale per giustapposizione di intervalli.
- **Teorema fondamentale del calcolo.** Primitiva di una funzione. Due primitive su un intervallo differiscono per una costante. Teorema fondamentale del calcolo: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua allora la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f. Cambiamento di variabile nell'integrale definito. Integrale di funzioni razionali, trigonometriche e radici quadrate di polinomi di secondo grado. Derivata di integrale rispetto un parametro presente nella funzione integranda e/o negli estremi.
- **Curve nello spazio.** Spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$: prodotto scalare, norma, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Funzioni di una variabile reale a valori vettoriali: continuità, derivata, integrale. Teorema del valor medio. Lunghezza di una curva. Formula integrale per la lunghezza di una curva con derivata continua.
- **Formula di Stirling.** Sviluppo di $\log((1 + x)/(1 - x))$. Integrale di $(\sin x)^n$ e prodotto infinito di Wallis. Formula di Stirling.
- **Integrali impropri.** Integrali impropri: intervalli semiaperti, semirette, intervalli meno un numero finito di punti. Integrale di $1/x^a$. Criterio del confronto e del confronto asintotico. Criterio integrale per la convergenza di una serie e stime sul resto. Costante γ di Eulero. f integrabile assolutamente implica f integrabile. Integrazione per parti applicata alla convergenza semplice, ma non assoluta, di funzioni oscillanti. Esempio: $\sin x/x$ è integrabile ma non assolutamente sulla semiretta positiva.
- **Calcolo di alcuni integrali impropri.** Calcolo dell'integrale di $\sin x/x$ tramite la sua trasformata di Laplace. Calcolo dell'integrale di e^{-x^2} su tutta la retta mediante approssimazione con $(1 - x^2/n)^n$.
- **Convergenza di funzioni.** Convergenza puntuale ed uniforme, norma del sup. Passaggio al limite negli integrali con ipotesi di convergenza uniforme.
- **Equazioni differenziali lineari.** Formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari non omogenee del primo ordine. Soluzione fondamentale di equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti. Applicazione della soluzione fondamentale alla determinazione di una soluzione particolare per equazioni differenziali lineari non omogenee di ordine n a coefficienti costanti. Risoluzione nel caso in cui il termine non omogeneo è della forma $p(t)\, e^{\lambda t}$, ove $\lambda \in \mathbb{C}$ e p è un polinomio.
- **Equazioni differenziali non lineari.** Problema di Cauchy: questioni di esistenza solo locale, e di non unicità della soluzione. Equazione di Bernoulli. Equazioni a variabili separabili. Equazioni nella forma di Eulero. Equazione di moto di un pendolo senza approssimazione lineare utilizzando lo spazio delle fasi e la conservazione dell'energia e determinazione del periodo di oscillazione. Riduzione di equazioni della forma $f(y, y', y'') = 0$ ad equazioni del primo ordine.

- **Funzioni definite implicitamente.** Teorema del Dini.

- **Funzioni convesse.** Definizioni equivalenti. Una funzione convessa su un intervallo aperto è Lipschitziana su ogni sottointervallo chiuso e limitato. Una funzione è convessa se e solamente se i suoi rapporti incrementali sono crescenti. Una funzione derivabile è convessa se e solamente se la sua derivata è crescente. Una funzione derivabile due volte è convessa se e solamente se la sua derivata seconda è non negativa. Estremo superiore di funzioni convesse è convesso. Disuguaglianza aritmetica-geometrica come disuguaglianza di convessità per $-\log x$.

- **Funzione Gamma.** Definizione, equazione funzionale $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. Data una forza centrale attrattiva proporzionale all'inverso della distanza, calcolo del tempo che impiega una particella inizialmente ferma a raggiungere il centro. Calcolo di $\Gamma(1/2)$ mediante l'integrale di e^{-x^2}. Caratterizzazione di Artin di $x!$: $x!$ è l'unica funzione $f : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ tale che $f(0) = 1$, $f(x+1) = (x+1)f(x)$, $\log f$ convessa. Conseguenze: formule di Weierstrass, Gauss, Eulero, e legame con la funzione Gamma. La funzione Beta: definizione, legame con la funzione Gamma.

- **Serie di Fourier.** Polinomi trigonometrici complessi e reali, con notazione esponenziale o come combinazione di seni e coseni. Identità di Dirichlet. Coefficienti di Fourier di una funzione 2π-periodica e Riemann integrabile (sugli intervalli limitati). Teorema di convergenza puntuale per serie di Fourier di funzioni continue a tratti che possiedono derivata destra e sinistra in ogni punto. Calcolo di $\sum_{k\geq 1} 1/k^2$ e di serie simili. Sviluppo della cotangente come serie di frazioni semplici, nuova dimostrazione della formula di prodotto infinito per il seno. Convergenza uniforme della serie di Fourier di una funzione C^1 a tratti. Convergenza L^2 ed identità di Parseval per una funzione Riemann integrabile.

Riferimenti bibliografici:

P. Acquistapace, F. Conti, A. Savojini, *Analisi matematica*, McGraw-Hill 2001. Capitoli 3,6,7,9,11.

G. Prodi, *Analisi matematica*, Boringhieri 2003, Capitoli 0,1,3,4,6,7.

R. Courant, F. John, *Introduction to calculus and analysis I*, Springer 1989.