

Analisi IA - Anno 2005/06 - Programma dettagliato

Prof. A. Abbondandolo

- **Teoria degli insiemi.** Relazioni e operazioni insiemistiche, prodotto cartesiano, applicazioni, applicazioni iniettive, surgettive, bigettive, composizione, immagine inversa, relazioni d'equivalenza, classi d'equivalenza ed insieme quoziente.
- **Combinatoria.** Cardinalità di un insieme finito. Cardinalità di unioni disgiunte, prodotti cartesiani. Cardinalità dell'insieme delle applicazioni tra due insiemi finiti. Numero di permutazioni di un insieme finito. Coefficienti binomiali. Formula del binomio. Principio di inclusione-esclusione. Cardinalità dell'insieme delle applicazioni iniettive e di quello delle applicazioni surgettive tra insiemi finiti. Probabilità in spazi finiti (casi favorevoli su casi possibili).
- **Principio d'induzione.** Ogni sottoinsieme non vuoto di \mathbb{N} ha minimo, argomenti induttivi. Somme di progressioni aritmetiche e geometriche, dimostrazione della disuguaglianza aritmetico-geometrica.
- **Estremo superiore.** Relazioni d'ordine parziali e totali. Massimi e minimi. Maggioranti e minoranti. Insiemi limitati superiormente ed inferiormente. Estremo superiore ed inferiore. Esempi: interi, interi positivi con la relazione di divisibilità, insieme delle parti, numeri razionali.
- **Numeri reali.** Campi ordinati. Campi Archimedei. Densità dei razionali nei campi Archimedei. Campi completi. Completo implica Archimedeo. Definizione assiomatica del campo dei numeri reali \mathbb{R} . Dimostrazione dell'unicità di un campo che verifichi gli assiomi dei reali. Dimostrazione dell'esistenza della radice n -esima di un numero positivo con l'estremo superiore. Retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}}$.
- **Somme infinite di famiglie di numeri positivi e Serie a termini positivi.** Definizione di somma infinita, definizione di serie (a termini positivi) convergente e divergente. Serie geometrica, serie armonica, serie di Mengoli, serie telescopiche. Criterio del confronto, confronto con serie geometriche: criterio della radice n -esima e del rapporto. Proprietà delle somme infinite: monotonia, associatività. Rappresentazione decimale di un numero reale.
- **Limiti di successioni.** Definizione di successione. Definizione di limite di una successione. Ogni successione convergente è limitata. Permanenza del segno. Successioni divergenti. Ogni successione monotona ha limite in $\overline{\mathbb{R}}$. Algebra delle successioni convergenti. Teorema dei Carabinieri. Definizione di sottosuccessione. Ogni successione possiede una sottosuccessione monotona. Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione reale limitata possiede una sottosuccessione convergente. Successioni di Cauchy. Criterio di Cauchy: una successione converge se e solamente se è di Cauchy. Algoritmo di Erone per il calcolo della radice quadrata.
- **Somme infinite di famiglie di numeri reali e Serie a termini reali.** Definizione di famiglia sommabile e di somma infinita. Definizione di serie convergente. Proprietà delle somme infinite: monotonia e associatività. Criterio di Cauchy per serie. Criterio di Leibniz per serie a segno alterno. Serie assolutamente convergenti. Convergenza assoluta implica convergenza. Cenni sui riordinamenti dei termini di una serie. Prodotto alla Cauchy di serie assolutamente convergenti. Criterio di condensazione. Stima logaritmica della serie armonica. Teorema di Abel e applicazione allo studio della convergenza della serie armonica generalizzata. Teorema di convergenza dominata (anche per famiglie di numeri complessi, vedi più avanti).
- **L'esponenziale reale.** Definizione, crescita, Lipschitzianità sulle semirette limitate superiormente, surgettività. Il logaritmo. Esponenziale in base qualsiasi, logaritmo in base qualsiasi.
- **Funzioni continue.** Topologia di \mathbb{R} : interni, insiemi aperti e chiusi, loro unioni ed intersezioni, caratterizzazioni con successioni. Parte interna, chiusura e loro proprietà. Insiemi densi. Punti isolati

e punti d'accumulazione. Intorni realtivi. Definizione di funzione continua in un punto. Algebra delle funzioni continue in un punto. Limite di una funzione in un punto di accumulazione del dominio. Proprietà dei limiti. Funzioni continue su un insieme. Teorema degli zeri. Esistenza della radice n -esima dal teorema degli zeri. Esempi di funzioni continue: polinomi, funzioni razionali, funzioni Lipschitziane, esponenziale, logaritmo. Teorema di continuità della funzione inversa. Teorema di Weierstrass: ogni funzione continua su un insieme chiuso e limitato possiede massimo e minimo.

- **Sviluppi asintotici.** Notazioni di Landau: funzioni asintotiche, o piccoli, O grandi. Loro proprietà.
- **Derivate.** Definizione di derivata di una funzione in un punto. Algebra delle funzioni derivabili in un punto. Funzioni derivabili su un insieme. Derivata dell'esponenziale, del logaritmo, di polinomi e funzioni razionali. Derivata della composizione e dell'inversa. Derivate di ordine successivo. Funzioni di classe C^k , per k in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- **Numeri complessi.** Modello dei numeri complessi \mathbb{C} con matrici conformi. Parte reale, parte immaginaria, coniugato, modulo, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Topologia di \mathbb{C} . Continuità su \mathbb{C} e teorema di Weierstrass per funzioni continue su un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{C} . Successioni e serie in \mathbb{C} . Somme infinite di famiglie di numeri complessi. Definizione di derivata in senso complesso.
- **L'esponenziale complesso.** Definizione, sviluppo in serie, proprietà di gruppo. Lipschitzianità sui semipiani con parte reale limitata superiormente. Funzioni seno e coseno. Surgettività e periodicità dell'esponenziale dall'asse immaginario sul cerchio unitario. Definizione di π . Forma polare di un numero complesso. Radici n -esime di un numero complesso.
- **Funzioni derivabili.** Principio di Fermat: se una funzione è derivabile in un punto di massimo o minimo interno, la sua derivata è nulla. Teoremi di Rolle e Lagrange. Derivata nulla su un intervallo implica funzione costante. Relazioni tra monotonia e segno della derivata. Formula di Taylor con resto di Peano e con resto di Lagrange. Condizioni sufficienti affinché un punto critico sia massimo o minimo locale in termini delle derivate di ordine successivo. Algoritmo di Newton.
- **Serie di potenze e funzioni analitiche.** Raggio di convergenza di una serie di potenze in \mathbb{C} . Prodotto alla Cauchy di serie di potenze. Teorema di derivabilità (anche complessa) per serie di potenze. Conseguenza: se una serie di potenze converge ad una funzione f , essa è la serie di Taylor di f . Principio d'identità per serie di potenze. Sviluppo in serie e relativo raggio di convergenza delle funzioni: $1/(1-x)$, e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^\alpha$. Definizione di funzione analitica. La funzione e^{-1/x^2} è C^∞ su \mathbb{R} ma non analitica. La somma di una serie di potenze con raggio di convergenza positivo è analitica. Derivabilità in senso complesso implica analiticità (solo enunciato). Conseguenze: algebra delle funzioni analitiche, analiticità della composizione e dell'inversa.
- **Il teorema fondamentale dell'algebra.** Dimostrazione. Conseguenza: fattorizzazione dei polinomi complessi.

Riferimenti bibliografici:

P. Acquistapace, F. Conti, A. Savojini, *Analisi matematica*, McGraw-Hill 2001. Capitoli 1,2,3,4 e Appendice.
 G. Prodi, *Analisi matematica*, Boringhieri 2003, Capitoli 0,1,3,4,6,7.