1 Settimana 13-17 febbraio

1.1 Prodotti infiniti (dagli appunti di P. Majer)

Definizione 1.1 *Sia (w_k) una successione di numeri complessi. Diciamo che il* prodotto infinito *dei w_k converge se la successione $\prod_{k=0}^n w_k$ converge per $n \to \infty$, ed indichiamo con*

$$\prod_{k=0}^{\infty} w_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} w_k$$

il limite.

Proposizione 1.1 *Sia $(z_k) \subset \mathbb{C}$ con $\sum_{k=0}^\infty |z_k| = A < +\infty$. Allora:*

(a) per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $\sum_{0\le k_1<\cdots<k_m} |z_{k_1}| \ldots |z_{k_m}| \le A^m/m!$; in particolare, risulta ben definita e sommabile la successione

$$s_0 := 0, \quad s_m := \sum_{0\le k_1<\cdots<k_m} z_{k_1} \ldots z_{k_m};$$

(b) il prodotto infinito degli $(1+z_k)$ converge e

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1+z_k) = \sum_{m=0}^{\infty} s_m.$$

Dimostrazione. Risulta

$$A^m = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |z_k|\right)^m = \sum_{(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{N}^m} |z_{k_1}|\ldots|z_{k_m}| \ge \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{N}^m \\ k_i\ne k_j \text{ se } i\ne j}} |z_{k_1}|\ldots|z_{k_m}|$$
$$= m! \sum_{0\le k_1<\cdots<k_m} |z_{k_1}|\ldots|z_{k_m}|,$$

da cui segue (a). Ponendo

$$s_0(n) := 1, \quad s_m(n) := \sum_{0\le k_1<\cdots<k_m\le n} z_{k_1}\ldots z_{k_m},$$

si ha

$$\prod_{k=0}^{n} (1+z_k) = \sum_{m=0}^{\infty} s_m(n).$$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ la successione $(s_m(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s_m, e si ha $|s_m(n)| \le A^m/m!$. Dato che $A^m/m!$ è sommabile, il teorema di convergenza dominata implica che

$$\sum_{m=0}^{\infty} s_m(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{m=0} s_m,$$

da cui (b). □

Proposizione 1.2 *Sia $z_{k,n} \in \mathbb{C}$, $|z_{k,n}| \leq a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A < +\infty$, e $z_{k,n} \to z_k^*$ per $n \to \infty$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{\infty} (1 + z_{k,n}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + z_k^*).$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.1, dobbiamo verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m^*,$$

dove

$$s_{m,n} := \sum_{0\leq k_1<\cdots<k_m} z_{k_1,n} \ldots z_{k_m,n}, \quad s_m^* := \sum_{0\leq k_1<\cdots<k_m} z_{k_1}^* \ldots z_{k_m}^*.$$

Dato che

$$|z_{k_1,n} \ldots z_{k_m,n}| \leq a_{k_1} \ldots a_{k_m}$$

e che la famiglia $\{a_{k_1} \ldots a_{k_m} \,|\, 0 \leq k_1 < \cdots < k_m\}$ è sommabile, per il teorema di convergenza dominata $s_{k,n} \to s_k^*$ per $n \to \infty$. Per la stima $|s_{m,n}| \leq A^m/m!$, una seconda applicazione del teorema di convergenza dominata implica la tesi. □

1.2 Una formula di prodotto infinito per $\sin x$

Il polinomio

$$p_n(z) = \frac{1}{2}[(1+z)^{2n} - (1-z)^{2n}]$$

ha grado $2n - 1$. È facile determinare tutte le sue radici: dato che -1 non è una radice, $p_n(z) = 0$ se e solamente se

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2n} = 1,$$

cioè

$$\frac{1-z}{1+z} = e^{\pi ki/n} \quad \text{per } -n < k < n,$$

dove si è scartata la radice $2n$-esima dell'unità -1 poichè $(1-z)/(1+z) \neq -1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Quindi le $2n-1$ radici di p_n sono

$$z_k = \frac{1 - e^{\pi ki/n}}{1 + e^{\pi ki/n}}, \quad \text{per } -n < k < n.$$

Per l'esercizio sotto,

$$z_k = -i \tan \frac{\pi k}{2n}.$$

Esercizio 1.1 *Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Mostrare che*

$$\frac{e^{i\alpha} - 1}{e^{i\alpha} + 1} = i \tan \frac{\alpha}{2}.$$

Soluzione. Si ha infatti

$$\frac{e^{i\alpha}-1}{e^{i\alpha}+1} = \frac{e^{i\alpha/2}(e^{i\alpha/2}-e^{i\alpha/2})}{e^{i\alpha/2}(e^{i\alpha/2}+e^{i\alpha/2})} = \frac{2i\sin\alpha/2}{2\cos\alpha/2} = i\tan\frac{\alpha}{2}.$$

$\square$

Il polinomio

$$z\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{z^2}{\tan^2\frac{\pi k}{2n}}\right)$$

ha le stesse radici di p_n. Dato che il coefficiente del termine di grado 1 del polinomio sopra è 1, mentre quello di p_n è $2n$, si ha

$$p_n(z) = 2nz\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{z^2}{\tan^2\frac{\pi k}{2n}}\right).$$

Calcolando questi polinomi in $z/2n$ troviamo l'identità

$$\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{z}{2n}\right)^{2n}-\left(1-\frac{z}{2n}\right)^{2n}\right] = z\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{z^2}{4n^2\tan^2\frac{\pi k}{2n}}\right). \tag{1}$$

Dato che $\tan x = x + o(x)$ per $x \to 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z^2}{4n^2\tan^2\frac{\pi k}{2n}} = \frac{z^2}{\pi^2 k^2}.$$

Dato che $\tan x \geq x$ per $x \in [0, \pi/2[$,

$$\frac{|z|^2}{4n^2\tan^2\frac{\pi k}{2n}} \leq \frac{|z|^2}{\pi^2 k^2}.$$

Essendo l'ultima quantità sommabile per $k \in \mathbb{N}$, possiamo passare al limite per $n \to \infty$ grazie alla Proposizione 1.2 ed ottenere l'identità

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Per $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$, otteniamo la formula del seno come prodotto infinito

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right). \tag{2}$$

1.3 Calcolo di $\sum 1/k^2$

Per la formula (2) e per la Proposizione 1.1,

$$\sin x = x \sum_{m=0}^{\infty} s_m(x),$$

dove

$$s_0(x) := 1, \quad s_m(x) := \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_m} \frac{(-1)^m x^{2m}}{\pi^{2m} k_1^2 \ldots k_m^2}.$$

Si ha quindi il seguente sviluppo in serie di potenze di $\sin x$,

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\pi^{2m}} \left(\sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_m} \frac{1}{k_1^2 \ldots k_m^2} \right) x^{2m+1}.$$

D'altra parte sappiamo che lo sviluppo in serie di potenze di $\sin x$ è

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}.$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di terzo grado ($m = 1$) otteniamo

$$-\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{6},$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esercizio 1.2 *Calcolare* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^4$.

Soluzione. Uguagliando i coefficienti dei termini di quinto grado ($m = 2$) otteniamo

$$\frac{1}{\pi^4} \sum_{1 \le k_1 < k_2} \frac{1}{k_1 k_2} = \frac{1}{5!},$$

da cui

$$\sum_{1 \le k_1 < k_2} \frac{1}{k_1 k_2} = \frac{\pi^4}{5!}.$$

D'altra parte

$$\frac{\pi^4}{36} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^2 = \sum_{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} = \sum_{\substack{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \\ k_1 \ne k_2}} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

$$= 2 \sum_{1 \le k_1 < k_2} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{2\pi^4}{5!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4},$$

da cui ricaviamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{2\pi^4}{5!} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

1.4 Funzioni uniformemente continue

Definizione 1.2 *Sia $E \subset \mathbb{C}$. Una funzione $f : E \to \mathbb{C}$ si dice uniformemente continua se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x, y \in E$, $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Teorema 1.3 (Heine-Cantor) *Se $E \subset \mathbb{C}$ è chiuso e limitato, ogni $f : E \to \mathbb{C}$ continua è uniformemente continua.*

Definizione 1.3 *Un modulo di continuità è una funzione $\omega : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ crescente, tale che $\omega(0) = 0$, ω continua in 0. Inoltre, diciamo che ω è un modulo di continuità per la funzione $f : E \to \mathbb{C}$ se $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$ per ogni $x, y \in E$.*

Si verifica facilmente che f è uniformemente continua se e solamente se possiede un modulo di continuità. Una funzione è Lipschitziana se e solamente se possiede un modulo di continuità lineare. Più in generale, una funzione che possiede un modulo di continuità della forma $\omega(s) = cs^\alpha$, con $\alpha > 0$, si dice α-Hölderiana.

Esercizio 1.3 *Sia I un intervallo. Dimostrare che se $f : I \to \mathbb{C}$ possiede un modulo di continuità ω tale che $\omega(s) = o(s)$ per $s \to 0$ allora f è costante. In particolare, le funzioni α-Hölderiane con $\alpha > 1$ sono costanti sugli intervalli.*

Soluzione. Infatti

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \frac{\omega(|h|)}{|h|} \to 0 \quad \text{per } h \to 0,$$

quindi f è derivabile in ogni punto del dominio e la sua derivata è nulla. Dato che il dominio è un intervallo possiamo concludere che f è costante. □

Esercizio 1.4 *Dimostrare che la funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, è α-Hölderiana.*

Soluzione. Dato che $\alpha < 1$, vale la disuguaglianza

$$(1+t)^\alpha \leq 1 + t^\alpha \quad \forall t \geq 0. \tag{3}$$

Infatti la funzione $g(t) = 1 + t^\alpha - (1+t)^\alpha$ è nulla per $t = 0$ e la sua derivata

$$g'(t) = \alpha \left(\frac{1}{t^{1-\alpha}} - \frac{1}{(1+t)^{1-\alpha}} \right)$$

è positiva per $t > 0$. Quindi g è strettamente crescente su $[0, +\infty[$, e dunque positiva per ogni $t > 0$, il che implica (3).

Siano ora $x, y \in [0, +\infty[$. Possiamo supporre $y \geq x$, ossia $y = x + h$ con $h \geq 0$, e da (3) deduciamo

$$|f(y) - f(x)| = y^\alpha - x^\alpha = (x+h)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left((1 + h/x)^\alpha - 1\right) \leq x^\alpha (h/x)^\alpha = h^\alpha = |y - x|^\alpha.$$

Quindi f è α-Hölderiana, con costante $c = 1$. □

Proposizione 1.4 *Se ω è un modulo di continuità per f e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora $|\lambda|\omega$ è un modulo di continuità per λf. Se ω_1 e ω_2 sono moduli di continuità per f_1 e f_2, rispettivamente, allora $\omega_1 + \omega_2$ è un modulo di continuità per $f_1 + f_2$, mentre $\omega_1 \circ \omega_2$ è un modulo di continuità per $f_1 \circ f_2$ (ove la composizione abbia senso).*