1 Settimana 26-30 settembre

Esercizio 1.1 *Consideriamo la successione di Fibonacci, definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} f(0) = 1, \ f(1) = 1, \\ f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Trovare una formula esplitica per $f(n)$, della forma

$$f(n) = \alpha x^n + \beta y^n,$$

con α, β, x, y numeri da determinare.

Soluzione. Consideriamo le successioni $g(n)$ che verificano la condizione

$$g(n) = g(n-1) + g(n-2) \quad \forall n \geq 2, \tag{1}$$

senza specificare le condizioni iniziali $g(0)$ e $g(1)$. Vediamo se per qualche valore $z \neq 0$ la successione $g(n) = z^n$ verifica la condizione (1). Si trova

$$z^n = z^{n-1} + z^{n-2} \quad \iff \quad z^2 = z + 1,$$

dove abbiamo diviso per il numero non nullo z^{n-2}. Le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Dunque le successioni (x^n) e (y^n) verificano entrambe la (1). Notiamo che se g ed h verificano la (1) e α, β sono numeri qualsiasi, allora $\alpha g + \beta h$ verifica ancora la (1) (una conseguenza della linearità dell'equazione (1)). Per trovare l'espressione della successione di Fibonacci, determiniamo α e β in modo che la successione

$$f(n) = \alpha x^n + \beta y^n$$

verifichi le condizioni iniziali $f(0) = 1$ e $f(1) = 1$. Si trova il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1, \end{cases}$$

che ha per soluzione

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}, \\ \beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}. \end{cases}$$

Concludiamo quindi che la successione di Fibonacci ha la forma

$$f(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$\square$

Vogliamo definire a^q, per a numero reale positivo e q numero razionale. Si pone

$$a^0 := 1, \quad a^n := a \cdots a \ (n \text{ volte}),\ a^{-n} := \frac{1}{a^n} \text{ per } n \in \mathbb{Z}^+,$$
$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \text{ per } m/n \in \mathbb{Q} \ (m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z}^+).$$

Per radice n-esima di a si intende l'unico numero positivo x tale che $x^n = a$ (l'esistenza e l'unicità di tale numero verrà dimostrata in seguito, dopo aver chiarito il concetto di numero reale).

Esercizio 1.2 *(a) Dati a, b reali positivi e p, q razionali, dimostrare le proprietà delle potenze*

$$a^{p+q} = a^p a^q, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^p = a^p b^p.$$

(b) Dimostrare che se $a > 1$ la funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(q) = a^q$, è strettamente crescente (cioè $p < q$ implica $f(p) < f(q)$).

Soluzione. (a) Iniziamo con l'osservare che le tre proprietà valgono banalmente se $p, q \in \mathbb{Z}$. Poniamo $p = m/n$, $q = \ell/k$, con $m, \ell \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{Z}^+$. Siano $x = a^p$, $y = a^q$, $z = a^{p+q} = a^{\frac{mk+\ell n}{nk}}$, cioè siano x, y, z le soluzioni positive di

$$x^n = a^m, \quad y^k = a^\ell, \quad z^{nk} = a^{mk+\ell n}.$$

Allora

$$(xy)^{nk} = x^{nk} y^{nk} = (x^n)^k (y^k)^n = (a^m)^k (a^\ell)^n = a^{mk} a^{\ell n} = a^{mk+\ell n} = z^{nk},$$

dunque $xy = z$, cioè vale la prima identità.

Con le stesse notazioni, siano $u = (a^p)^q = x^q$ e $v = a^{pq} = a^{\frac{m\ell}{nk}}$, cioè le soluzioni positive di

$$u^k = x^\ell, \quad v^{nk} = a^{m\ell}.$$

Allora

$$u^{nk} = (u^k)^n = (x^\ell)^n = (x^n)^\ell = (a^m)^\ell = a^{m\ell} = v^{nk},$$

dunque $u = v$, cioè vale la seconda identità.

Con le stesse notazioni, siano $w = b^p$ e $t = (ab)^p$, cioè le soluzioni positive di

$$w^n = b^m, \quad t^n = (ab)^m.$$

Allora

$$(xw)^n = x^n w^n = a^m b^m = (ab)^m = t^n,$$

quindi $xw = t$, cioè vale la terza identità.

(b) Iniziamo con l'osservare che per $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$, il fatto che $a > 1$ implica che $a^{m-n} > 1$, dunque

$$a^m = a^{m-n} a^n > a^n,$$

e la restrizione di f agli interi è strettamente crescente. Osserviamo anche che dato $n \in \mathbb{Z}$, la funzione $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ è strettamente crescente. Siano $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$. Ponendo $p = m/n$, $q = \ell/k$, $m, \ell \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{Z}^+$, si ha $mk < n\ell$, e dunque

$$(a^m)^k = a^{mk} < a^{\ell n} = (a^\ell)^n.$$

Prendendo la radice nk-esima di entrambi i membri, troviamo

$$a^p = \sqrt[n]{a^m} < \sqrt[k]{a^\ell} = a^q,$$

come si voleva dimostrare.

Esercizio 1.3 *Dimostrare per induzione le seguenti identità*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1.$$

Soluzione. Le prime tre indentità per $n = 1$ si riducono a $1 = 1$. Se la prima identità è vera per n, troviamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = n+1+\sum_{k=1}^{n} k = n+1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ed il passo induttivo è verificato. Se la seconda identità è vera per n, troviamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2+\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6},$$

ed il passo induttivo è verificato. Se la terza identità è vera per n, troviamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3+\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2(4n+4+n^2)}{4}$$
$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,$$

ed il passo induttivo è verificato.

Per $n = 0$ l'ultima identità si riduce a $1 = 1$. Se l'ultima identità è vera per n, troviamo

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = x^{n+1}+\sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1}+\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}-x^{n+2}+1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x},$$

ed il passo induttivo è verificato. $\square$

Esercizio 1.4 *Data la funzione $f(x) = ax + b$, trovare l'espressione di $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (f composta per se stessa n volte).*

Soluzione. Esaminando i primi casi,

$$f^1(x) = ax + b, \quad f^2(x) = a^2x + ab + b, \quad f^3(x) = a^3x + (a^2 + a + 1)b,$$

si congettura

$$f^n(x) = a^n x + b \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

Questa formula si verifica facilmente per induzione: è vera per $n = 1$, e se è vera per n si ha

$$f^{n+1}(x) = f^n(f(x)) = a^n(ax + b) + b \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^{n+1}x + b \sum_{k=0}^{n} a^k.$$

Sfruttando la formula per la somma dei primi n termini di una progressione geometrica (ultima identità nell'Esercizio 1.3), troviamo infine

$$f^n(x) = \begin{cases} a^n + b\frac{1-a^n}{1-a} & \text{se } a \neq 1, \\ a^n x + bn & \text{se } a = 1. \end{cases}$$

$\square$