8 Settimana 14-18 novembre

Esercizio 8.1 *Studiare la continuità in* 0 *delle funzioni*

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & se\ x \neq 0, \\ 0 & se\ x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = xf(x).$$

Soluzione. La funzione f non è continua in zero, poichè non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ (in ogni intorno di 0 la funzione $\sin 1/x$ assume tutti i valori nell'intervallo $[-1, 1]$). La funzione g è continua in 0. Infatti il limite di $g(x)$ per $x \to 0$ è 0, dato che g è il prodotto di una funzione infinitesima per una limitata. □

Esercizio 8.2 *Studiare la continuità delle funzioni*

$$f(x) := \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & se\ x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x) = xf(x).$$

Soluzione. La funzione f non è continua in alcun punto. Infatti, dato $x \in \mathbb{R}$, in ogni intorno di x cadono sia numeri razionali che irrazionali, quindi f assume sia il valore 1 che il valore 0. Per lo stesso motivo, la funzione g non è continua in $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mentre è continua in 0, poichè $g(0) = 0$ e $g(x)$ è infinitesima per $x \to 0$. □

Esercizio 8.3 *Determinare i limiti*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x},$$

dove $a > 0$.

Soluzione. Risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Si vedano le soluzioni degli Esercizi 6.11 e 6.12. □

Esercizio 8.4 *(1) Dare una definizione ragionevole di limite sinistro e destro:*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x), \quad \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

(2) Dimostrare che esiste il limite se e solamente se i limiti destro e sinistro esistono e sono uguali. (3) Dimostrare che se $f : I \to \mathbb{R}$ *è una funzione crescente su un intervallo aperto, allora per ogni* $x_0 \in I$ *i limiti sinistro e destro per* $x \to x_0$ *di* $f(x)$ *esistono e risulta*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Soluzione. (1) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per l'insieme $\{x \in E \mid x < x_0\}$. Allora il numero reale S si dice *limite sinistro di $f(x)$ per x che tende a x_0* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in E,\ x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - S| < \epsilon.$$

Analogamente, se x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme $\{x \in E \mid x > x_0\}$, il numero reale D si dice *limite destro di $f(x)$ per x che tende a x_0* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in E,\ x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - D| < \epsilon.$$

(2) Siamo nelle ipotesi che x_0 sia punto di accumulazione tanto per l'insieme $\{x \in E \mid x < x_0\}$ che per l'insieme $\{x \in E \mid x > x_0\}$, in modo che abbia senso parlare di limite destro e sinistro. Se i limiti sinistro S e destro D esistono e coincidono, il loro comune valore verifica la proprietà che definisce il limite. Se esiste il limite L, esso verifica in particolare le proprietà che definiscono limite sinistro e destro.

(3) Se $f : I \to \mathbb{R}$ è crescente, si verifica immediatamente che i numeri

$$\sup\{f(x) \mid x \in I,\ x < x_0\}, \quad \inf\{f(x) \mid x \in I,\ x > x_0\},$$

verificano le proprietà che definiscono limite sinstro e destro di $f(x)$ per $x \to x_0$. La conclusione segue dalla disuguaglianza

$$\sup\{f(x) \mid x \in I,\ x < x_0\} \le f(x_0) \le \inf\{f(x) \mid x \in I,\ x > x_0\},$$

conseguenza della crescenza di f. $\square$