9 Settimana 21-25 novembre

Esercizio 9.1 *Indichiamo con $M(2,\mathbb{R})$ l'algebra delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Siano*

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} := \{Z \in M(2,\mathbb{R}) \mid ZJ = JZ\}.$$

Dimostrare le seguenti caratterizzazioni di $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{Z \in M(2,\mathbb{R}) \mid \det Z \geq 0,\ Z \text{ manda coppie di vett. ort. in coppie di vett. ort.}\} \\ &= \left\{Z \in M(2,\mathbb{R}) \mid \det Z \geq 0,\ Z^T Z = r^2 I \text{ con } r \in \mathbb{R}\right\} \qquad (1) \\ &= \{Z \in M(2,\mathbb{R}) \mid \text{la trasformazione } Z \text{ conserva gli angoli orientati}\}. \end{aligned}$$

Soluzione. Se $Z^T Z = r^2 I$ e u, v sono coppie di vettori ortogonali, allora

$$\langle Zu, Zv\rangle = \langle Z^T Z u, v\rangle = \langle r^2 u, v\rangle = r^2\langle u, v\rangle = 0,$$

dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica il prodotto scalare Euclideo in $\mathbb{R}^2$. Viceversa, supponiamo che Z mandi coppie di vettori ortogonali in coppie di vettori ortogonali. La matrice $Z^T Z$ è simmetrica e semi-positiva, quindi esiste una base ortonormale $\{u, v\}$ tale che $Z^T Z u = \lambda u$ e $Z^T Z v = \mu v$, con $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$. I vettori $u + v$ ed $u - v$ risultano ortogonali, quindi

$$0 = \langle Z(u+v), Z(u-v)\rangle = \langle Z^T Z(u+v), u-v\rangle = \langle \lambda u + \mu v, u - v\rangle = \lambda - \mu.$$

Questo mostra che

$$\begin{aligned} &\{Z \in M(2,\mathbb{R}) \mid Z \text{ manda coppie di vett. ort. in coppie di vett. ort.}\} \\ &\qquad = \left\{Z \in M(2,\mathbb{R}) \mid Z^T Z = r^2 I \text{ con } r \in \mathbb{R}\right\}, \end{aligned}$$

quindi il secondo ed il terzo insieme nell'identità (1) coincidono.

Si è visto in classe che

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \{aI + bJ \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi, se $Z = aI + bJ$ è un elemento di $\mathcal{C}$, si ha

$$\det Z = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \geq 0,$$

ed inoltre

$$Z^T Z = (aI - bJ)(aI + bJ) = a^2 I - b^2 J^2 = (a^2 + b^2) I.$$

Quindi Z appartiene al secondo insieme in (1).

Viceversa, supponiamo che Z abbia determinante non negativo e che $Z^T Z = r^2 I$. Possiamo supporre $r > 0$ (se $r = 0$ si ha $Z = 0$). Se poniamo $U = r^{-1} Z$, si ha che $\det U \geq 0$ e

$U^T U = I$. Quindi $U \in SO(2,\mathbb{R})$, il gruppo delle matrici ortogonali reali 2×2 con determinante positivo. Si tratta del gruppo delle rotazioni nel piano, gruppo che risulta commutativo. Anche J appartiene a $SO(2,\mathbb{R})$ (è la rotazione di $\pi/2$), ed in particolare $ZJ = JZ$. Quindi $Z \in \mathcal{C}$, ed abbiamo dimostrato l'uguaglianza tra i primi tre insiemi in (1).

Se Z conserva gli angoli orientati, in particolare ha determinante positivo e manda coppie di vettori ortogonali in coppie di vettori ortogonali. Quindi l'ultimo insieme in (1) è un sottoinsieme di $\mathcal{C}$. Se Z appartiene a $\mathcal{C}$, possiamo supporre $Z^T Z = r^2 I$ con $r > 0$ e $\det Z > 0$. Allora

$$|Zu|^2 = \langle Zu, Zu\rangle = \langle Z^T Zu, u\rangle = \langle r^2 u, u\rangle = r^2|u|^2.$$

Se $\alpha \in [0, 2\pi[$ è l'angolo orientato tra i vettori non nulli u e v, e $\beta \in [0, 2\pi[$ è l'angolo orientato tra i vettori Zu e Zv, si ha

$$r^2|u|\,|v|\cos\beta = |Zu|\,|Zv|\cos\beta = \langle Zu, Zv\rangle = \langle Z^T Zu, v\rangle = r^2\langle u, v\rangle = r^2|u|\,|v|\cos\alpha.$$

Quindi $\beta = \alpha$ oppure $\beta = 2\pi - \alpha$. Il secondo caso risulta incompatibile con $\det Z > 0$. $\square$