12 Settimana 22 - 26 maggio

Sviluppo della cotangente come serie di frazioni semplici. Sia $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos tx$ per $-\pi \leq x \leq \pi$ e prolungata per 2π-periodicità. La funzione f risulta pari, continua, derivabile ovunque tranne che nei punti $(2\mathbb{Z}+1)\pi$, dove esistono comunque derivata destra e sinistra. Lo sviluppo di Fourier di f è pertanto uno sviluppo in soli coseni e converge puntualmente ad f su tutto $\mathbb{R}$. I coefficienti sono

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos tx\, dx = \frac{1}{2\pi t}[\sin \pi t - \sin(-\pi t)] = \frac{1}{\pi t}\sin \pi t,$$

$$\begin{aligned} a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos tx \cos kx\, dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(t+k)x + \cos(t-k)x]\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{t+k}\sin \pi(t+k) + \frac{2}{t-k}\sin \pi(t-k)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k(t-k)\sin \pi t + (-1)^k(t+k)\sin \pi t}{t^2-k^2} &= \frac{2t(-1)^k \sin \pi t}{\pi(t^2-k^2)}, \end{aligned}$$

per $k \geq 1$, da cui

$$\cos tx = \frac{1}{\pi t}\sin \pi t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2t(-1)^k \sin \pi t}{\pi(t^2-k^2)} \cos kx.$$

Dividendo per $\sin \pi t$ e scegliendo $x = \pi$ otteniamo

$$\operatorname{cotan} \pi t = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{t^2-k^2} = \frac{2t}{\pi}\left(\frac{1}{2t^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t^2-k^2}\right). \tag{1}$$

Abbiamo cioè sviluppato la cotangente in frazioni semplici.

Formula di prodotto infinito per il seno. Diamo una dimostrazione alternativa della formula di prodotto infinito per il seno (vedi settimana 13-17 febbraio). Da (1) otteniamo

$$\pi \operatorname{cotan} \pi t - \frac{1}{t} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2t}{k^2-t^2}. \tag{2}$$

Dato $0 < x < 1$ integriamo l'identità sopra su $[0, x]$. La funzione a sinistra è continua su tale intervallo ed il suo integrale vale:

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\pi\frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} - \frac{1}{t}\right) dt = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^x \left(\pi\frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} - \frac{1}{t}\right) dt &= \lim_{\epsilon \to 0+} [\log \sin \pi t - \log t]_\epsilon^x \\ &= \lim_{\epsilon \to 0+}\left[\log\frac{\sin \pi x}{x} - \log\frac{\sin \pi \epsilon}{\epsilon}\right] = \log\frac{\sin \pi x}{\pi x}. \end{aligned}$$

Dato che $0 \le 2t/(k^2-t^2) \le 2x/(k^2-x^2)$ e che la serie $\sum_{k\ge 1} 2x/(k^2-x^2)$ converge, la serie di destra in (2) converge uniformemente su $[0,x]$, quindi il suo integrale su $[0,x]$ vale

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{2t}{k^2-t^2}\,dt &= \sum_{k=1}^{\infty}\big[\log(k^2-t^2)\big]_0^x = \sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k^2-x^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).
\end{aligned}$$

Otteniamo perciò la formula

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right), \quad \forall x \in]0,1[.$$

Questa formula vale ovviamente anche per $x=0$, e dal fatto che il seno è una funzione dispari, vale per $x \in]-1,1[$.

Convergenza uniforme delle serie di Fourier. Dimostreremo che sotto ipotesi di regolarità per f, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$.

Definizione 12.1 *Sia I un intervallo limitato. Una funzione $f: I \to \mathbb{C}$ si dice C^1 a tratti se è continua, se esiste $f'(x)$ per ogni $x \in I$ tranne al più per x in un sottoinsieme finito S, dove esistono comunque f'_+ e f'_-, se f' è continua su $I \setminus S$ e se $f'(s)$ tende a $f'_+(s_0)$ per $s \to s_0+$ e $f'(s)$ tende a $f'_-(s_0)$ per $s \to s_0-$, per ogni $s_0 \in S$. Sia I un intervallo. Una funzione $f: I \to \mathbb{C}$ si dice C^1 a tratti se lo è su ogni sottointervallo limitato.*

Teorema 12.1 *Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e C^1 a tratti. Allora*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|\hat{f}_k|^2 < +\infty, \tag{3}$$

e la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$, ossia posto

$$u_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\hat{f}_k e^{ikx},$$

si ha $\|u_n - f\|_\infty \to 0$ per $n \to \infty$.

Dimostrazione. La funzione f' è continua a tratti, in particolare è Riemann integrabile ed i suoi coefficienti di Fourier sono ben definiti:

$$\widehat{f'}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = ik\hat{f}_k,$$

dove si è integrato per parti, sfruttando le ipotesi di regolarità di f (più precisamente, si è integrato per parti separatamente su ogni intervallo dove f' è definita e continua). Dalla disuguaglianza di Bessel per f', ossia

$$2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f'}_k|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx,$$

segue (3). Dal teorema di convergenza puntuale, sappiamo che $u_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz otteniamo

$$\begin{aligned} |u_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{|k|>n} \hat{f}_k e^{ikx} \right| \leq \sum_{|k|>n} |\hat{f}_k| = \sum_{|k|>n} k|\hat{f}_k| \frac{1}{k} \\ &\leq \left(\sum_{|k|>n} k^2 |\hat{f}_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|k|>n} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Per (3) e per la sommabilità di $1/k^2$, la quantità sopra tende a zero per $n \to \infty$, da cui la convergenza uniforme di u_n a f. $\square$

Esercizio 12.1 *Dimostrare che se $f \in C^h(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è 2π-periodica, allora*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^{2h} |\hat{f}_k|^2 < +\infty.$$

Soluzione. Induzione su h. Il caso $h = 0$ segue della disuguaglianza di Bessel. Supponiamo la proposizione vera per le funzioni di classe C^h e sia f di classe C^{h+1}. Allora f' è di classe C^h, da cui

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^{2h} |\widehat{f'}_k|^2 < +\infty.$$

Integrando per parti come nella dimostrazione sopra si trova $\widehat{f'}_k = ik\hat{f}_k$, da cui la tesi. $\square$

Convergenza L^2 ed identità di Parseval. Ricordiamo che la norma L^2 di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica è

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Dato che

$$\|f\|_{L^2} \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_\infty,$$

la convergenza uniforme implica la convergenza in norma L^2 (si osservi che il viceversa non è vero).

Se u_n è il polinomio trigonometrico di Fourier di grado n, l'identità tra (5) e (6) negli appunti della settimana 15-19 maggio si può riscrivere come

$$\|f - u_n\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k|^2.$$

Da questa identità segue che u_n converge ad f in norma L^2 se e solamente se vale

$$2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx, \tag{4}$$

identità nota come *identità di Parseval.* Dimostriamo che questo è vero per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica e Riemann integrabile sugli intervalli limitati. Quindi la disuguaglianza di Bessel (equazione (6) negli appunti della settimana 15-19 maggio) diventa un'uguaglianza quando $n \to \infty$.

Esercizio 12.2 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica Riemann integrabile su $[0, 2\pi]$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica affine a tratti tale che $\|g - f\|_{L^2} < \epsilon$.*

Soluzione. Trattando separatamente parte reale e parte immaginaria è sufficiente considerare il caso di f reale. Dalla definzione di integrabilità secondo Riemann segue esiste una funzione $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ costante a tratti e 2π-periodica tale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)| \, dx < \epsilon, \quad \|s\|_\infty \le \|f\|_\infty,$$

(ad esempio basta prendere come s la somma di Riemann inferiore relativa ad una partizione così fine che gli integrali di somma superiore ed inferiore differiscano meno di ϵ). Allora

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) + s(x)| \, |f(x) - s(x)| \, dx \le 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s(x)| \, dx \\ \le 2\|f\|_\infty \epsilon.\end{aligned}$$

Dunque è sufficiente approssimare in norma L^2 una funzione costante a tratti. Ma questa approssimazione si realizza facilmente modificando la funzione vicino ai punti di discontinuità, mediante un raccordo tra le due costanti lineare affine di pendenza sufficientemente grande. □

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica e Riemann integrabile sugli intervalli limitati. Fissiamo $\epsilon > 0$. Per l'Esercizio 12.2, esiste $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica affine a tratti tale che $\|g - f\|_{L^2} < \epsilon$. Per il Teorema 12.1 la successione di funzioni

$$v_n := \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}_k e^{ikx}$$

converge a g uniformemente. A maggior ragione v_n converge a g in norma L^2, quindi esiste n tale che $\|v_n - g\|_{L^2} < \epsilon$, da cui

$$\|v_n - f\|_{L^2} \leq \|v_n - g\|_{L^2} + \|g - f\|_{L^2} < 2\epsilon.$$

Dato che il polinomio di Fourier u_n di f è il polinomio trigonometrico di grado n che meglio approssima f in norma L^2, si ha

$$\|u_n - f\|_{L^2} \leq \|v_n - f\|_{L^2} < 2\epsilon.$$

Questo mostra che u_n converge a f in norma L^2, il che è equivalente all'identità di Parseval.