12 Settimana 12/16 dicembre

Esercizio 12.1 *Dato $k \geq 2$ intero, scrivere l'algoritmo di Newton per il calcolo di $\sqrt[k]{2}$ a partire da $x_0 = 2$, e stimarne la velocità di convergenza.*

Soluzione. Si tratta di trovare la soluzione positiva dell'equazione $f(x) := x^k - 2 = 0$. La formula generale per l'algoritmo di Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

si riduce in questo caso a

$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{2}{k x_n^{k-1}}, \quad x_0 = 2.$$

Posto

$$g(x) = \frac{k-1}{k} x + \frac{2}{k x^{k-1}},$$

si ha

$$g'(x) = \frac{k-1}{k}\left(1 - \frac{2}{x^k}\right), \quad g''(x) = \frac{2(k-1)}{x^{k+1}}.$$

Se $x_n > \sqrt[k]{2}$ si trova per il teorema di Lagrange

$$x_{n+1} - \sqrt[k]{2} = g(x_n) - g(\sqrt[k]{2}) = g'(\xi)(x_n - \sqrt[k]{2}), \tag{1}$$

per qualche $\xi \in]\sqrt[k]{2}, x_n[$. Dato che $g'(x)$ è positiva per $x > \sqrt[k]{2}$, deduciamo che x_{n+1} è ancora maggiore di $\sqrt[k]{2}$. Poichè $x_0 = 2 > \sqrt[k]{2}$, per induzione si ha che $x_n > \sqrt[k]{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poniamo

$$\delta_n = |x_n - \sqrt[k]{2}| = x_n - \sqrt[k]{2}.$$

Per (1) si ha

$$\delta_{n+1} \leq \max\left\{ g'(\xi) \mid \xi \in [\sqrt[k]{2}, x_n] \right\} \delta_n,$$

e dal fatto che $0 \leq g'(x) \leq (k-1)/k$ per $x \geq \sqrt[k]{2}$, si trova

$$\delta_{n+1} \leq \frac{k-1}{k} \delta_n.$$

Dunque, dato che $\delta_0 < 1$,

$$\delta_n \leq \left(\frac{k-1}{k}\right)^n \delta_0 \leq \left(\frac{k-1}{k}\right)^n, \tag{2}$$

ed il fatto che $(k-1)/k$ sia minore di 1 implica che $\delta_n \to 0$, e dunque $x_n \to \sqrt[k]{2}$. Vediamo di migliorare la stima sulla veolcità di convergenza. Tenendo conto del fatto che $g'(\sqrt[k]{2}) = 0$ e che se $x \geq \sqrt[k]{2}$

$$g''(x) = \frac{2(k-1)}{x^{k+1}} \leq \frac{2(k-1)}{2^{(k+1)/k}} \leq k-1,$$

si trova la stima

$$\delta_{n+1} = g(x_n) - g(\sqrt[k]{2}) = \frac{1}{2} g''(\xi)\delta_n^2 \leq \frac{k-1}{2}\delta_n^2.$$

Posto $\delta_n = 2/(k-1)\epsilon_n$ si ha $\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n^2$, da cui

$$\epsilon_{h+n} \leq \epsilon_h^{(2^n)},$$

per ogni $h, n \in \mathbb{N}$. Quindi

$$\delta_{n+h} = \frac{2}{k-1}\epsilon_{n+h} \leq \frac{2}{k-1}\epsilon_h^{(2^n)} = \frac{2}{k-1}\left(\frac{k-1}{2}\delta_h\right)^{(2^n)}.$$

Possiamo usare la stima di convergenza rozza (2) per determinare un h tale che il termine nell'ultima parentesi sia minore di - ad esempio - 1/2. Vogliamo quindi

$$\frac{k-1}{2}\left(\frac{k-1}{k}\right)^h \leq \frac{1}{2},$$

o equivalentemente

$$(k-1)^{h+1} \leq k^h.$$

Passando agli esponenziali, questa disuguaglianza è equivalente a

$$h \geq \frac{\log(k-1)}{\log k - \log(k-1)}.$$

Quindi, scelto h in questo modo, si trova la stima di convergenza rapida

$$\delta_{n+h} \leq \frac{2}{k-1} 2^{-(2^n)}.$$

□

Esercizio 12.2 *(a) Trovare una serie di potenze con raggio di convergenza infinito la cui somma $y(x)$ risolva l'equazione di Bessel*

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0,$$

con $y(0) = 1$. (b) Detta y la soluzione del problema (a), trovare una seconda soluzione dell'equazione di Bessel su $\mathbb{R}^+$, della forma

$$y(x)\log x + u(x),$$

con u somma di una serie di potenze da determinare.

Soluzione. (a) Supponiamo che la serie di potenze $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ abbia raggio di convergenza positivo. Allora possiamo derivare termine a termine nell'intervallo di convergenza, e y risolve l'equazione di Bessel se e solamente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Traslando gli indici si trova

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1})x^n = 0,$$

ossia

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1})x^n = 0,$$

ove si è posto $a_{-1} = 0$. Per il principio d'identità delle serie di potenze, i coefficienti di questa serie devono annullarsi, dunque

$$a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}, \quad \forall n \geq 0.$$

Usando il fatto che $a_{-1} = 0$ si trova che tutti i termini di indice dispari sono nulli, $a_{2n+1} = 0$ per ogni n. Usando il fatto che $a_0 = 1$ (poichè stiamo chiedendo $y(0) = 1$) si dimostra facilmente per induzione la formula

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

La serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n}$$

ha raggio di convergenza infinito, e dunque risolve il problema dato.

(b) consideriamo la funzione $v = y \log x + u$. Le sua derivate prima e seconda sono

$$v' = y' \log x + \frac{y}{x} + u', \quad v'' = y'' \log x + 2\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} + u''.$$

Quindi v risolve l'equazione di Bessel se e solamente se

$$\begin{aligned} & xv'' + v' + xv \\ &= x(y'' \log x + 2\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} + u'') + y' \log x + \frac{y}{x} + u' + x(y \log x + u) \\ &= \log x(xy'' + y' + xy) + xu'' + u' + xu + 2y' \end{aligned}$$

si annulla identicamente. Tenendo conto del fatto che y risolve l'equazione di Bessel, v è soluzione se e solamente se

$$xu'' + u' + xu = -2y'. \tag{3}$$

Cerchiamo una serie di potenze $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ che risolva questa equazione. Si trova

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{k-1}k}{(k!)^2 2^{2k}} x^{2k-1},$$

o equivalentemente, posto come prima $b_{-1} = 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)^2 b_{n+1} + b_{n-1}) x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{k-1}k}{(k!)^2 2^{2k}} x^{2k-1}.$$

La serie di destra contiene solamente potenze di grado dispari, quindi si deve avere

$$(2k+1)^2 b_{2k+1} + b_{2k-1} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

che insieme a $b_{-1} = 0$ implica che $b_{2k+1} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Scelto invece $n = 2k-1$, si deve avere

$$(2k)^2 b_{2k} + b_{2k-2} = \frac{4(-1)^{k-1}k}{(k!)^2 2^{2k}},$$

ossia

$$b_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k(k!)^2 2^{2k}} - \frac{b_{2k-2}}{4k^2}.$$

Scegliendo arbitrariamente b_0, la formula sopra definisce la successione b_{2k} e la serie di potenze

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k}$$

risolve (3). Basta infatti verificare che questa serie ha raggio di convergenza positivo. □

Esercizio 12.3 *Trovare una serie di potenze con raggio di convergenza positivo la cui somma $y(x)$ risolva il problema*

$$\begin{cases} y'' + x^2 y = 0, \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \end{cases}$$

in un intorno di 0.

Soluzione. Tenendo conto delle condizioni iniziali, la serie y deve avere la forma

$$y(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n.$$

Sostituendo questa y nell'equazione troviamo

$$y''(x) + x^2 y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + x^3 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

$$= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + (1 + 20a_5)x^3 + \sum_{n=4}^{\infty}[a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n-1}]x^n.$$

Quindi

$$a_2 = a_3 = a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{1}{20}, \quad a_{n+2} = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \quad \forall n \geq 4.$$

Perciò

$$a_{4k+2} = a_{4k+3} = a_{4k+4} = 0, \quad \forall k \geq 0,$$

e

$$a_{4k+1} = \frac{(-1)^k}{(4k+1)4k(4k-3)(4k-4)\dots 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}, \quad \forall k \geq 1.$$

Troviamo quindi

$$y(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+1)4k(4k-3)(4k-4)\dots 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} x^{4k+1}.$$

Studiamo la convergenza assoluta di questa serie con il criterio del rapporto. Otteniamo

$$\frac{|a_{4k+1}|\,|x|^{4k+1}}{|a_{4k-3}|\,|x|^{4k-3}} = \frac{|x|^4}{4k(4k+1)} \to 0 \quad \text{per } k \to \infty.$$

Quindi questa serie di potenze ha raggio di convergenza infinito. □

Esercizio 12.4 *Trovare tutte le serie di potenze con raggio di convergenza infinito le cui somme $y(x)$ risolvano l'equazione di Airy*

$$y'' = xy.$$

Soluzione. Posto $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ si deve avere

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},$$

o equivalentemente - posto $a_{-1} = 0$ -

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0.$$

Si trova pertanto la regola di ricorrenza

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \geq 0.$$

Dal fatto che $a_{-1} = 0$ si trova che

$$a_{3k+2} = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Invece

$$a_{3k} = \frac{a_{3k-3}}{3k(3k-1)}, \quad a_{3k+1} = \frac{a_{3k-2}}{3k(3k+1)}.$$

Posto $a_0 = \lambda$ e $a_1 = \mu$, si trova

$$a_{3k} = \frac{(3k-2)(3k-5)\ldots 7\cdot 4}{(3k)!}\lambda, \quad a_{3k+1} = \frac{(3k-1)(3k-4)\ldots 8\cdot 5\cdot 2}{(3k+1)!}\mu.$$

Si ottiene pertanto la serie di potenze

$$y(x) = \lambda\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-2)(3k-5)\ldots 7\cdot 4}{(3k)!}x^{3k} + \mu\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-1)(3k-4)\ldots 8\cdot 5\cdot 2}{(3k+1)!}x^{3k+1},$$

che ha raggio di convergenza infinito (lo si verifichi) per ogni scelta dei parametri λ e μ. □

Esercizio 12.5 (Formula di Leibniz) *Dimostrare la seguente formula per la derivata n-esima di un prodotto:*

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f\, D^{n-k} g.$$

Soluzione. Dimostriamo questa formula per induzione su n. La formula è ovvia per $n = 0$. Suppostala vera per n, si trova

$$\begin{aligned} D^{n+1}(fg) &= D\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f\, D^{n-k} g = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(D^{k+1} f\, D^{n-k} g + D^k f\, D^{n+1-k} g\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] D^k f\, D^{n+1-k} g + f D^{n+1} g. \end{aligned}$$

Tenendo conto della formula

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

si ottiene

$$D^{n+1}(fg) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^k f\, D^{n+1-k} g,$$

il che prova il passo induttivo. □

Esercizio 12.6 *Dimostrare che il numero e è irrazionale.*

Soluzione. Supponiamo per assurdo che $e = p/q$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$. Dato che e non è un intero (sappiamo che $2 < e < 3$), $q \geq 2$. Dalla formula di e come somma della serie esponenziale si ha

$$\frac{p}{q} = e = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

e moltiplicando ambo i membri per $q!$ si trova

$$p(q-1)! = \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}. \tag{4}$$

Tutti gli addendi nella prima somma (quella finita) in (4) sono interi (se $n \leq q$, $n!$ divide $q!$), quindi tale somma è un intero. Invece la seconda somma (ossia la serie) in (4) può essere riscritta come

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q!}{(q+n)!},$$

ed osservando che

$$\frac{q!}{(q+n)!} = \frac{1}{(q+1)\dots(q+n)} < \frac{1}{q^n},$$

si trova

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q-1}.$$

Dato che $q \geq 2$, l'ultima quantità non supera 1, da cui

$$0 < \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} < 1.$$

Concludiamo che il secondo membro in (4) non è intero, essendo la somma di un intero e di un numero strettamente compreso tra 0 e 1. Questa è una contraddizione, poiché il primo membro di (4) è un intero. □

Esercizio 12.7 *Si determini la massima lunghezza di una scala a pioli (pensata come un segmento) che può essere fatta passare per un corridoio composto da un tratto largo a e da una curva ad angolo retto seguita da un tratto largo b (si consideri il problema piano, ignorando il fatto che il passaggio potrebbe essere facilitato inclinando la scala verticalmente).*

Soluzione. Effettuando la curva, una scala di lunghezza massima toccherà in qualche momento il punto O, punto interno della curva (se cosí non fosse, potremmo far passare per il corridoio una scala più lunga). Rimanendo adiacente al punto O (eventualmente in punti diversi), la scala deve essere in grado di ruotare di un angolo retto. La lunghezza massima della scala sarà dunque pari alla lunghezza del più piccolo segmento che passa per O, ha un estremo A sul lato esterno del corridoio largo a, ed un estremo B sul lato esterno del corridoio largo b. Se indichiamo con x l'angolo tra la semiretta che da O va nella direzione del lato interno del corridoio largo b e la semiretta di direzione OB, si ha

$$|OB| = \frac{b}{\sin x}, \quad |OA| = \frac{a}{\cos x}.$$

Quindi si tratta di determinare il seguente minimo di funzione:

$$m := \min\left\{ f(x) \mid 0 < x < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad f(x) := \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}.$$

Osseviamo che $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to 0+$ e per $x \to \pi/2-$. Un semplice corollario del teorema di Weierstrass ci assicura allora che la funzione continua f ha minimo nell'intervallo aperto $]0, \pi/2[$. Dato che f è derivabile, in un punto di minimo la derivata

$$f'(x) = -\frac{a \sin x}{\cos^2 x} + \frac{b \cos x}{\sin^2 x} = \frac{b \cos^3 x - a \sin^3 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

deve annullarsi. Tale derivata si annulla in x se e solamente se $b \cos^3 x - a \sin^3 x = 0$, ossia se e solamente se $\tan^3 x = b/a$, cioè solamente nel punto

$$x = \arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Essendoci un solo punto critico, questo punto è necessariamente il punto di minimo di f. Per tale x si ha

$$\sin x = \frac{b^{1/3}}{(a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2}}, \quad \cos x = \frac{a^{1/3}}{(a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2}},$$

e dunque

$$m = f(x) = a^{2/3}(a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2} + b^{2/3}(a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2} = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

$\square$