10 Settimana 28 novembre - 2 dicembre

10.1 Il teorema di convergenza dominata

Teorema 10.1 *Siano $\{z_{k,n}\}_{k\in I}$ famiglie di numeri complessi, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che per ogni $k \in I$ la successione $(z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converga. Supponiamo inoltre che per ogni $k \in I$ si abbia*

$$|z_{k,n}| \le a_k \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in I} z_{k,n} = \sum_{k\in I} \lim_{n\to\infty} z_{k,n}.$$

Si noti che l'ipotesi (1) garantisce che l'ultima somma a destra sia ben definita. Il seguente controesempio mostra l'importanza della condizione di dominazione (1).

Sia $I = \mathbb{N}$, e dati $k \in \mathbb{N}$, $n \in N$, si ponga

$$z_{k,n} := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } 0 \le k \le n, \\ 0 & \text{se } k \ge n+1. \end{cases}$$

Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione $(z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 0, ma si ha

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} z_{k,n} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = 1,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in I} z_{k,n} = 1 \ne 0 = \sum_{k\in I} \lim_{n\to\infty} z_{k,n}.$$

Esercizio 10.1 *Confrontare le seguenti quantità:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)^k.$$

Qualora risultino diverse, spiegare perché non è possibile applicare il Teorema di convergenza dominata.

Soluzione. Dato che $n/(n+1) < 1$, si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2n+1},$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Invece,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)^k = \sum_{k=0} (-1)^k,$$

che non risulta essere una serie convergente. Se a_k domina $(-n/(n+1))^k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$a_k \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \left(-\frac{n}{n+1}\right)^k \right| = 1,$$

e quindi $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ non è sommabile. $\square$

10.2 Esponenziale complesso (dagli appunti di P. Majer)

Per il criterio del rapporto, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Proposizione 10.2 *Sia $z \in \mathbb{C}$. Esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

e coincide con la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Dimostrazione. Grazie al binomio di Newton si ha

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} w_{k,n},$$

dove abbiamo posto

$$w_{k,n} := \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} & \text{se } k \leq n, \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Se $n \geq k$ si ha dunque

$$w_{k,n} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{z^k}{k!}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, la successione $(w_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tende a $z^k/k!$. Inoltre

$$|w_{k,n}| \leq \frac{|z|^k}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dato che la famiglia $\{|z|^k/k!\}_{k\in\mathbb{N}}$ è sommabile, per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} w_{k,n} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

che è quanto volevamo dimostrare. $\square$

Definizione 10.1 *Dato $z \in \mathbb{C}$, definiamo l'esponenziale di z come*

$$e^z := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

L'esponenziale complesso estende l'esponenziale reale.

Esercizio 10.2 *Sia (z_n) una successione di numeri complessi convergente a z. Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^z.$$

Soluzione. Si ragiona in maniera analoga alla dimostrazione della Proposizione 10.2. Per il binomio di Newton si ha

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} w_{k,n},$$

dove abbiamo posto

$$w_{k,n} := \begin{cases} \binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} & \text{se } k \le n, \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Se $n \ge k$ si ha dunque

$$w_{k,n} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{z_n^k}{k!}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, la successione $(w_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tende a $z^k/k!$. Inoltre

$$|w_{k,n}| \le \frac{(\sup|z_n|)^k}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove $\sup|z_n| < +\infty$ poichè la successione (z_n) è convergente. Dato che la famiglia

$$\{(\sup|z_n|)^k/k!\}_{k\in\mathbb{N}}$$

è sommabile, per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{N}} w_{k,n} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z.$$

□

Proposizione 10.3 *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha*

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

In particolare, e^z non è nullo e il suo inverso è e^{-z}. Quindi l'esponenziale è un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{C}$ con l'addizione in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ con la moltiplicazione.

Dimostrazione. La successione

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \left(1+\frac{w}{n}\right)^n$$

converge a $e^z e^w$. D'altra parte possiamo riscrivere questa successione come

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \left(1+\frac{w}{n}\right)^n = \left(1+\frac{z+w+(zw)/n}{n}\right)^n.$$

Il numeratore nella frazione nell'ultima espressione tende a $z+w$, quindi per l'Esercizio 10.2 questa espressione tende a e^{z+w}. Concludiamo che $e^z e^w = e^{z+w}$. □

In particolare,

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}.$$

Il primo termine di questo prodotto è l'usuale esponenziale reale. Ci resta da studiare il secondo termine, cioè la restrizione dell'esponenziale all'asse immaginario. Iniziamo con l'osservare la seguente:

Proposizione 10.4 *Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$. In particolare, se $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^{ix-ix} = 1,$$

quindi l'esponenziale di un numero immaginario ha sempre modulo 1. *Quindi*

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

La funzione

$$\mathbb{R} \to \mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad x \mapsto e^{ix},$$

è un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{R}$ con l'addizione nel cerchio unitario $\mathbb{U}$, che è un gruppo commutativo rispetto alla moltiplicazione.

Dimostrazione. Basta osservare che dalle proprietà del coniugio segue che

$$\overline{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{\overline{z}}{n}\right)^n.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ha la tesi. □

Dallo sviluppo in serie dell'esponenziale segue la seguente stima sull'errore commesso sviluppando al primo ordine in 0:

Lemma 10.5 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta*

$$|e^z - 1 - z| \le \frac{|z|^2}{2} e^{|z|}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$|e^z - 1 - z| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^2}{2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+2)!} z^k \right| \leq \frac{|z|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+2)!} |z|^k.$$

Osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta $2/(k+2)! \leq 1/k!$, quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+2)!} |z|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k = e^{|z|},$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

In particolare

$$e^z = 1 + z + O(z^2) \quad \text{per } z \to 0,$$

da cui

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1. \tag{2}$$

Come l'esponenziale reale risulta e^r-Lipschitziano sulla semiretta $]-\infty, r]$, così si ha la seguente:

Proposizione 10.6 *Sia $r \in \mathbb{R}$. Allora la funzione e^z è e^r-Lipschitziana sul semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq r\}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$|e^z - e^w| \leq e^r |z - w| \quad \forall z, w \in A_r := \{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} x \leq r\}.$$

Possiamo supporre $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} w$. Si ha

$$|e^z - e^w| = |e^z(1 - e^{w-z})| = |e^z|\,|1 - e^{w-z}| = e^{\operatorname{Re} z}\,|1 - e^{w-z}| \leq e^r |1 - e^{w-z}|,$$

quindi ci basta dimostrare che

$$|e^x - 1| \leq |x| \quad \forall x \in A_0 = \{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} x \leq 0\}. \tag{3}$$

Per il Lemma 10.5,

$$|e^x - 1| \leq |x| + |e^x - 1 - x| \leq |x| + \frac{|x|^2}{2} e^{|x|},$$

quindi vale una stima del tipo

$$|e^x - 1| \leq |x| + c|x|^2 e^{|x|}, \tag{4}$$

con $c = 1/2$. Mostriamo che se $x \in A_0$ e vale la stima (4) con la costante c, allora la stessa stima vale con la costante $c/2$. Supponendo vera la (4) si ha infatti

$$\begin{aligned} |e^x - 1| &= |(e^{x/2} + 1)(e^{x/2} - 1)| = |e^{x/2} + 1|\,|e^{x/2} - 1| \leq (|e^{x/2}| + 1)|e^{x/2} - 1| \\ &\leq (e^{\operatorname{Re} x/2} + 1) \left(\frac{|x|}{2} + c\frac{|x|^2}{4} e^{|x|/2} \right) \leq 2 \left(\frac{|x|}{2} + c\frac{|x|^2}{4} e^{|x|/2} \right) \\ &= |x| + \frac{c}{2}|x|^2 e^{|x|/2} \leq |x| + \frac{c}{2}|x|^2 e^{|x|}, \end{aligned}$$

che è proprio la (4) con costante $c/2$. Concludiamo che la stima (4) vale per ogni $c > 0$, e passando al limite per $c \to 0$ si ottiene la (3). $\square$

In particolare la funzione $x \mapsto e^{ix}$ è 1-Lipschitziana da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$.

Definizione 10.2 *Sia $x \in \mathbb{R}$. Definiamo il* coseno *e il* seno *di x come*

$$\cos x := \operatorname{Re} e^{ix}, \quad \sin x := \operatorname{Im} e^{ix}.$$

Quindi

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Dal fatto che $e^{ix} \in \mathbb{U}$ segue che

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad |\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dalla Lipschitzianità di e^{ix} segue che tanto il coseno quanto il seno sono 1-Lipschitziane, in particolare funzioni continue.

Osservazione 10.1 *Ricordando l'espressione per parte reale ed immaginaria di un numero complesso mediante il coniugio, si ha che*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2}.$$

Queste formule permettono di estendere le funzioni coseno e seno a tutto il piano complesso, ottenendo funzioni $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Sia $x \in \mathbb{R}$. Separando la parte reale da quella immaginaria nello sviluppo in serie

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

troviamo gli sviluppi in serie di coseno e seno:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

validi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo che il coseno è una funzione *pari*, mentre il seno è una funzione *dispari*, cioè

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Dato che $e^0 = 1$, si ha $\cos 0 = 1$ e $\sin 0 = 0$. Grazie alla simmetria è sufficiente studiare coseno e seno per $x \geq 0$. Premettiamo la seguente:

Proposizione 10.7 *Per ogni* $x \in]0, \sqrt{30}[$ *vale*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \tag{5}$$

Per ogni $x \in]0, \sqrt{42}[$ *vale*

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}. \tag{6}$$

Dimostrazione. Sia $x > 0$. Osserviamo che la disuguaglianza

$$\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} - \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0$$

vale per ogni $n \geq 3$ se e solamente se $|x|^2 < 2n(2n-1)$ per ogni $n \geq 3$, ossia se e solamente se $x < \sqrt{30}$. Se $x \in]0, \sqrt{30}[$ lo sviluppo in serie del coseno

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + \left(\frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}\right) + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \left(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!}\right) - \left(\frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^{12}}{12!}\right) - \dots \end{aligned}$$

implica la (5).

Analogamente, la disuguaglianza

$$\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0$$

vale per ogni $n \geq 3$ se e solamente se $|x|^2 < 2n(2n+1)$ per ogni $n \geq 3$, ossia se e solamente se $x < \sqrt{42}$. Se $x \in]0, \sqrt{42}[$ lo sviluppo in serie del seno

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right) + \dots$$

implica la (6). □

Dato che $1 - x^2/2 \geq 0$ su $[0, \sqrt{2}]$, da (5) deduciamo che $\cos x$ è positivo in tale intervallo. Dato che $1 - x^2/2 + x^4/24$ è negativo per $x = \sqrt{3}$ (vele $-1/8$), deduciamo che $\cos \sqrt{3} < 0$. Per il teorema degli zeri, il coseno si annulla in qualche punto dell'intervallo $]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$, mentre è positivo in $[0, \sqrt{2}]$. Definiamo il numero $\pi/2$ come il primo numero reale positivo dove si annulla il coseno:

Definizione 10.3 *Il numero* π *è definito da*

$$\frac{\pi}{2} := \min \{x \geq 0 \mid \cos x = 0\}.$$

La continuità del coseno garantisce che questo minimo esista. Per quanto detto, risulta

$$\sqrt{2} < \frac{\pi}{2} < \sqrt{3}.$$

Nell'intervallo $]0, \sqrt{6}[$ la funzione $x - x^3/6$ è positiva, quindi per (6) si ha che $\sin x$ è positivo in tale intervallo. In $\pi/2$ il coseno si annulla, quindi $\sin^2 \pi/2 = 1$, ma dovendo essere positivo si deve avere $\sin \pi/2 = 1$. Pertanto $e^{i\pi/2} = i$, e si hanno le seguenti caratterizzazioni di $\pi/2$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &:= \min \{x \geq 0 \mid \cos x = 0\} = \min \{x \geq 0 \mid \sin x = 1\} \\ &= \min \left\{x \geq 0 \mid e^{ix} = i\right\} = \min \left\{x > 0 \mid e^{ix} \in \{-1, 1, i, -i\}\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Esercizio 10.3 *Le radici quadrate del numero complesso $w = a + ib \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, sono i due numeri*

$$\pm \left(\sqrt{\frac{|w| + a}{2}} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{|w| - a}{2}} \right).$$

Soluzione. Vedi appunti esercitazioni. □

Proposizione 10.8 *La funzione*

$$[0, 2\pi[\to \mathbb{U}, \quad x \mapsto e^{ix},$$

è bigettiva.

Dimostrazione. Dimostriamo l'iniettività. Siano $x \leq y$ numeri in $[0, 2\pi[$ tali che $e^{ix} = e^{iy}$. Allora $e^{i(y-x)} = 1$. Il numero $t := y - x$ appartiene all'intervallo $[0, 2\pi[$ e risulta $e^{it} = 1$. Dato che $e^{it/2}$ è una radice quadrata di 1, risulta $e^{it/2} \in \{-1, 1\}$ (infatti per l'Esercizio 10.3 il numero 1 ha due sole radici quadrate, 1 e -1). Analogamente $e^{it/4}$ è una radice quadrata di 1 oppure di -1, quindi $e^{it/4} \in \{1, -1, i, -i\}$. Per l'ultima identità nella caratterizzazione (7), si ha che $t/4 = 0$ oppure $t/4 = \pi/2$. nel secondo caso si avrebbe $t = 2\pi$, contro il fatto che $t \in [0, 2\pi[$. Quindi $t = 0$, da cui $x = y$, il che prova l'iniettività.

Per dimostrare la surgettività dobbiamo mostrare che per ogni $u \in \mathbb{U}$ esiste un $x \in [0, 2\pi[$ tale che $e^{ix} = u$. Consideriamo inizialmente il caso in cui u appartenga al primo quadrante, cioè $\operatorname{Re} u \geq 0$, $\operatorname{Im} u \geq 0$. Allora $0 \leq \operatorname{Re} u \leq 1$, e dato che il coseno è continuo ed assume valori 1 in 0 e 0 in $\pi/2$, per il Teorema degli zeri esiste $x \in [0, \pi/2]$ tale che $\operatorname{Re} u = \cos x$. Tenendo conto del fatto che $\sin x \geq 0$ in $[0, \pi/2]$ e $\operatorname{Im} u \geq 0$, si ha che $\operatorname{Im} u = \sin x$, da cui $u = e^{ix}$.

Possiamo ridurre il caso generale al caso appena trattato osservando che la moltiplicazione per i permuta i 4 quadranti in senso anti-orario. Quindi dato $u \in \mathbb{U}$, esiste $j \in \{1, i, -1, -i\}$ tale che ju appartiene a $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Per quanto visto sopra, esiste $x \in [0, \pi/2[$ tale che $e^{ix} = ju$. Quindi $u = j^{-1} e^{ix} = \overline{j} e^{ix}$. Dato che $\overline{j} = e^{\pi ik}$ con $0 \leq k \leq 3$ intero, si ha $u = e^{i(x+k)\pi}$, con $0 \leq (x + k)\pi < 2\pi$. □

Da questo risultato e dalla formula $e^z = e^{\mathrm{Re}\, z} e^{i \mathrm{Im}\, z}$ segue che la funzione

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}\, z < 2\pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto e^z,$$

è bigettiva. La funzione esponenziale quindi manda $\mathbb{C}$ surgettivamente su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ma non in modo iniettivo: se $e^z = w$ allora le controimmagini di w sono tutti e soli i numeri del tipo $z + 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Definizione 10.4 *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice* periodica di periodo $T > 0$ *se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se T è il più piccolo numero positivo con questa proprietà, T si dice* periodo minimo *di f.*

Dalla Proposizione 10.8 segue facilmente la seguente:

Proposizione 10.9 *Le funzioni $e^{ix} : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $\cos \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono periodiche di periodo minimo 2π.*

Dal limite (2), segue facilmente che la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = e^{ix},$$

è derivabile e la sua derivata vale

$$f'(x) = ie^{ix} = -\sin x + i \cos x.$$

Dato che

$$f'(x) = D(\cos x) + D(\sin x) i,$$

si ottiene

$$D(\cos x) = \sin x, \quad D(\sin x) = \cos x.$$

Osservazione 10.2 *Mentre il punto x si muove da 0 a 2π, il punto $f(x) = e^{ix}$ compie un giro completo della circonferenza. Dato che $|f'(x)| = 1$, il punto $f(x)$ si muove con "velocità" 1, quindi la circonferenza è "lunga" 2π. Queste considerazioni euristiche saranno rese rigorose quando definiremo la lunghezza di una curva.*

10.3 Soluzioni di altri esercizi

Esercizio 10.4 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrazione. Dato che $f(x)$ diverge per $|x| \to +\infty$, esiste $M > 0$ tale che $f(x) > f(0)$ se $|x| > M$. Dato che f è continua su $\mathbb{R}$, in particolare è continua su $[-M, M]$. Essendo questo un insieme chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione f ammette minimo su $[-M, M]$: esiste $x_0 \in [-M, M]$ tale che $f(x_0) = \min_{[-M,M]} f$. Dato che 0 appartiene all'intervallo $[-M, M]$, $f(x_0) \leq f(0)$. Dato che $f(x) > f(0) \geq f(x_0)$ per $|x| > M$, concludiamo che $f(x_0)$ è il minimo di f su tutto $\mathbb{R}$. $\square$

Esercizio 10.5 (Teorema di Weierstrass su $\mathbb{C}$) *Sia $F \subset \mathbb{C}$ un insieme chiuso e limitato (qui F limitato vuol dire che esiste $c > 0$ tale che $|z| \leq c$ per ogni $z \in F$) e sia $f : F \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f possiede massimo e minimo su F.*

Dimostrazione. Mostriamo preliminarmente come il Teorema di Bolzano-Weierstrass si estende a $\mathbb{C}$: *ogni successione $(z_n) \subset \mathbb{C}$ limitata* (cioè tale che la successione di numeri reali $|z_n|$ sia limitata) *possiede una sottosuccessione convergente.* Infatti, dato che

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

(z_n) è limitata se e solamente se le successioni reali $(\operatorname{Re} z_n)$ e $(\operatorname{Im} z_n)$ sono limitate. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass la successione reale $(\operatorname{Re} z_n)$ possiede una sottosuccessione $(\operatorname{Re} z'_n)$ convergente. A sua volta, la successione reale $(\operatorname{Im} z'_n)$ possiede una sottosuccessione $(\operatorname{Im} z''_n)$ convergente. Quindi le successioni reali $(\operatorname{Re} z''_n)$ e $(\operatorname{Im} z''_n)$ sono entrambe convergenti, il che è equivalente a dire che (z''_n) è convergente.

Dimostriamo che f possiede massimo (l'esistenza del minimo si deduce considerando $-f$). Sia $s := \sup_F f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e sia $(z_n) \subset F$ una successione tale che $f(z_n) \to s$. Questa successione è limitata - essendo a valori in nel limitato F - e per l'estensione a $\mathbb{C}$ del Teorema di Bolzano-Weierstrass appena dimostrata, possiede una sottosuccessione (z_{k_n}) che converge ad un certo z. Dato che F è chiuso, z appartiene ad F. Dato che f è continua in z, $(f(z_{k_n}))$ converge a $f(z)$. Essendo una sottosuccessione di $(f(z_n))$, la successione $(f(z_{k_n}))$ tende anche a s. Quindi $f(z) = s$, che in particolare è un numero reale (e non $+\infty$). L'estremo superiore di f è assunto su F, e quindi è un massimo. $\square$

Esercizio 10.6 *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Si mostri che f è derivabile in 0, che $f'(0) > 0$, ma che f non è crescente in alcun intorno di 0.

Soluzione. Dato che il seno è una funzione limitata si ha

$$f(x) = \frac{x}{2} + x^2 O(x) = \frac{x}{2} + o(x) \quad \text{per } x \to 0,$$

quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 1/2 > 0$. Consideriamo le due successioni

$$x_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \frac{2}{(4n+1)\pi}, \quad y_n := \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \frac{2}{(4n-1)\pi}.$$

Essendo infinitesime, definitivamente appartengono ad un arbitrario intorno di 0. Ovviamente, $x_n < y_n$, ma con semplici calcoli si trova che

$$f(y_n) - f(x_n) = -\frac{32n^2 + 2\pi + 8}{\pi^2(4n-1)^2(4n+1)^2} < 0,$$

quindi f non è crescente in nessun intorno di 0. $\square$

Esercizio 10.7 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in a, tale che a sia un punto di minimo per f. Cosa si può dire di $f'(a)$?*

Soluzione. Si può dire che $f'(a) \geq 0$. Infatti se $f'(a) < 0$, dalla permanenza del segno segue che esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0 \quad \forall x \in]a, a + \epsilon[.$$

Dato che $x - a > 0$, deduciamo che $f(x) - f(a) < 0$ per $x \in]a, a + \epsilon[$, il che viola il fatto che $f(a)$ sia il minimo. □

Esercizio 10.8 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che f è costante.*

Soluzione. Se I consiste di un solo punto non cè niente ad dimostrare. Siano $x < y$ punti di I. Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in]x, y[$ tale che

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) = 0,$$

quindi $f(y) = f(x)$. Dall'arbitrarietà di x e y concludiamo che f è costante su I. □

Esercizio 10.9 *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dimostrare che $f' > 0$ implica f strettamente crescente, ma che il viceversa non vale. Mostrare che f strettamente crescente è equivalente a*

$$f' \geq 0, \ \text{e} \quad \{x \in I \mid f'(x) = 0\} \ \text{ha parte interna vuota.} \tag{8}$$

Soluzione. Siano $x < y$ punti di I. Per il Teorema di Lagrange, esiste $\xi \in]x, y[$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

e l'ipotesi $f' > 0$ implica $f(y) > f(x)$. Quindi f è stettamente crescente. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, è strettamente crescente, ma la sua derivata si annulla in 0.

Supponiamo f strettamente crescente. I rapporti incrementali sono positivi, e passando al limite si trova che $f' \geq 0$. Se per assurdo l'insieme

$$\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$

avesse parte interna non vuota, cioè contenesse un intervallo $]a, b[$, $a < b$, allora f sarebbe costante su tale intervallo (Esercizio 10.8), e f non sarebbe strettamente crescente.

Supponiamo che valgano le condizioni (8). Dato che $f' \geq 0$, f è crescente. Se per assurdo non fosse strettamente crescente, esisterebbero $x < y$ in I tali che $f(x) = f(y)$. Per la crescenza, $f(z) = f(x) = f(y)$ per ogni $z \in]x, y[$. Ma allora $f' = 0$ in tale intervallo, dunque l'insieme degli zeri di f' conterrebbe $]x, y[$, e non avrebbe parte interna vuota. □