

Prima prova intermedia del primo modulo di
ANALISI
–07.11.2005–

1. Sia $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3} \end{cases}$$

(a) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

(b) Calcolare la somma infinita

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_k}.$$

(a) Posto $b_n = a_n^2$ è immediato verificare che $b_{n+1} = b_n + 3$ e quindi, ragionando per induzione, si conclude che b_n è la progressione aritmetica $b_n = 4 + 3n$ e $a_n = \sqrt{b_n}$. Osserviamo che vale la stima $\sqrt{n+1} \leq a_n \leq 2\sqrt{n+1}$. È chiaro quindi che $\lim a_n = +\infty$: se M è una costante fissata $a_n > M$ definitivamente (per esempio per ogni $n \geq M^2$).

(b) Visto che $a_n \leq 2\sqrt{n+1}$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = +\infty$$

2. Dire per quali valori del parametro reale $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{(k^2)}}{k!}$$

È immediato verificare che se $|x| \leq 1$ la serie è assolutamente convergente: infatti se $|x| \leq 1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^{(k^2)}}{k!} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Se invece $|x| > 1$ allora

$$\frac{|x|^{(k^2)}}{k!} \geq \frac{|x|^{(k^2)}}{k^k} = \left(\frac{|x|^k}{k}\right)^k \quad (1)$$

Scrivendo $|x| = 1 + (|x| - 1)$, dalla formula del binomio segue che

$$\text{se } |x| > 1 \text{ allora } \frac{|x|^k}{k} \geq \frac{(k-1)}{2} (|x| - 1)^2 \rightarrow +\infty \text{ per } k \rightarrow +\infty.$$

Quindi la quantità tra parentesi tonde che compare nel termine di destra dell'equazione (??) **non** è infinitesima e dunque non sono infinitesimi gli addendi della serie.

Pertanto la serie **non** converge se $|x| > 1$.

3. Sia D l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi con la proprietà che le cifre della loro espressione in base dieci sono strettamente decrescenti (per esempio: 9632 appartiene a D mentre 5411 non appartiene a D).

(a) Calcolare la cardinalità di D .

(b) Provare che vale la stima

$$\sum_{k \in D} \frac{1}{k} \leq 10(e-1) - 1$$

(a) Sia D_ℓ l'insieme dei numeri di D con ℓ cifre. In $|D_1|$ ci sono i numeri da 1 a 9, quindi $|D_1| = 9$.

In generale, per $\ell \geq 2$, $|D_\ell| = \binom{10}{\ell}$ in quanto D_ℓ può essere messo in bigezione coi sottoinsiemi di ℓ elementi dell'insieme dei simboli $S := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$: se $F \subset S$, $|F| = \ell$ ed $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ è ordinato in modo che le cifre siano decrescenti, ad esso si associa il numero $m = \sum_{j=1}^{\ell} 10^{(\ell-j)} \alpha_j \in D$ e viceversa¹. Pertanto

$$|D| = 9 + \sum_{\ell=2}^{10} 10 \binom{10}{\ell} = 9 + (1+1)^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} = 2^{10} - 2 = 1022.$$

(b)

$$\sum_{k \in D_1} \frac{1}{k} < 9; \quad \sum_{k \in D_\ell} \frac{1}{k} \leq \binom{10}{\ell} 10^{(1-\ell)}$$

Quindi

$$|D| \leq 9 + 10 \sum_{\ell=2}^{10} \binom{10}{\ell} 10^{-\ell} = 9 + 10 \left[\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} - 2 \right] \leq 10e - 11$$

Osserviamo che nella stima sopra abbiamo maggiorato la somma degli inversi dei primi nove interi positivi con 9. In realtà svolgendo il calcolo si verifica che tale somma è minore di 3: in effetti la stima suggerita è ben lungi dall'essere ottimale!

¹Per esempio: al sottoinsieme $\{9, 6, 3, 2, 0\} \subset S$ assoceremo il numero 96320.