Elementi di Analisi Matematica

Compito del 25 luglio 2011: soluzioni

Esercizio 1. Sia (a_n) la successione definita per ricorrenza da

$$a_0 := 0; \quad a_{n+1} := \sqrt{n + a_n^2}.$$

Si dica se la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ ha somma finita.

Soluzione. Poiché $a_0^2 = 0$ e $a_{n+1}^2 := n + a_n^2$ si ha subito $a_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1) \leq n^2$. Quindi $a_n^{-1} \geq n^{-1}$, e la serie ha somma infinita per confronto con la serie armonica.

Esercizio 2.

(a) Trovare delle costanti $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che si abbia

$$g(x) := \tan(x) - b\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^a = o(1) \ ,$$

per $x \to \frac{\pi}{2}$.

(b) Per questa scelta si determini il segno di g in un intorno di $\frac{\pi}{2}$.

Soluzione. Calcolando lo sviluppo di Taylor al terzo ordine in zero per la funzione tangente si trova $\tan t = t + t^3/3 + o(t^3) = t(1 + t^2/3 + o(t^2))$ per $t \to 0$, e quindi

$$\frac{1}{\tan t} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right) = \frac{1}{t} - \frac{t}{3} + o(t) \quad (\text{per}\, t \to 0)\,.$$

Ponendo $x := \frac{\pi}{2} + t$ si ha $\tan x = \tan(\frac{\pi}{2} + t) = -\frac{1}{\tan t}$, e si trova quindi, per $x \to \frac{\pi}{2}$

$$\tan(x) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ ,$$

che in un intorno di $\frac{\pi}{2}$ ha il segno di $x - \frac{\pi}{2}$. Ciò corrisponde alla scelta di costanti $a = b = -1$ nell'espressione di g.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo per ogni numero reale x

$$f(x) := \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}\, dt$$

(a) Qual è il massimo intervallo $[-a, a]$ su cui f è iniettiva?

(b) Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ammette infinite soluzioni $x \in \mathbb{R}$?

(c) Si provi che f è analitica e se ne calcoli lo sviluppo in serie di potenze con centro in 0.

Soluzione. Cambiando variabile con la sostituzione $xt = s$ l'integrale si scrive anche

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(s)}{s}\, ds\,.$$

Quindi f è una primitiva della funzione analitica $\frac{\sin x}{x}$, e se ne cava subito lo sviluppo in 0

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots\,,$$

con raggio di convergenza infinito. Poiché f' è positiva nell'intervallo $]-\pi, \pi[$, f è strettamente crescente in $[-\pi, \pi]$, e questo è il massimo intervallo su cui f sia iniettiva, giacché f' cambia segno in $\pm\pi$ (quindi $\pm\pi$ è un massimo o minimo locale e f lì non è localmente iniettiva). Infine esistono i limiti [1]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s}\, ds = \lambda_0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Ciò implica che per ogni $\lambda \neq \pm\lambda_0$ l'insieme $f^{-1}(\lambda)$ è limitato. Dunque esso è anche finito per il teorema degli zeri isolati (o più semplicemente dallo studio del segno di f': f è strettamente monotona in ciascun intervallo $[k\pi, (k+1)\pi]$, cosicché $\mathrm{card} f^{-1}(\lambda) \le \mathrm{diam} f^{-1}(\lambda)/\pi$). Infine scrivendo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s}\, ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(s)}{s}\, ds = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{|\sin(s)|}{s + k\pi}\, ds\,,$$

somma di una serie che verifica il criterio di Leibnitz, si ha che per ogni $k \in \mathbb{N}$ il valore λ_0 è compreso fra $f(k\pi)$ e $f((k+1)\pi)$, per cui l'insieme $f^{-1}(\frac{\pi}{2})$ è infinito per il teorema degli zeri, e così pure l'insieme $f^{-1}(-\frac{\pi}{2})$.

[1] l'esistenza dell'integrale improprio poteva darsi per nota, e suo valore non era richiesto.