Elementi di Analisi Matematica

Compito del 12 settembre 2011: soluzioni

Esercizio 1.

(a) Si trovi uno sviluppo asintotico per la somma dei reciproci dei primi n numeri dispari, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$, ricordando l'analogo sviluppo per la somma dei reciproci dei primi n numeri interi, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + o(1)$, per $n \to \infty$.

(b) Si consideri il riordinamento della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ottenuto prendendo alternatamente tre termini positivi e due negativi, in successione, e se ne calcoli la somma:

$$s := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \dots$$

Soluzione. (a) Si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \log 2n + \gamma - \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{2}\gamma + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2}\log n + \log 2 + \frac{1}{2}\gamma + o(1) \ .$$

(b) La somma parziale dei primi $5n$ termini della serie è

$$s_{5n} := \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\log 3n + \log 2 + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\log 2n - \frac{1}{2}\gamma + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2}\log 6 + o(1) \ ,$$

da cui segue $s = \frac{1}{2}\log 6$ tenendo conto che il termine generico della serie è infinitesimo.

Esercizio 2. Sia t un numero reale e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x + \frac{t}{1+x^2}.$$

(a) Si determinino i valori di t per i quali la funzione f risulta invertibile.

(b) Tra i valori t del punto precedente, si determinino quelli per cui la funzione inversa $g := f^{-1}$ risulta di classe C^∞.

(c) Fissato un valore t per cui f è invertibile, si determinino a, b, c tali che

$$g(y) = y + a + \frac{b}{y} + \frac{c}{y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right), \qquad \text{per } y \to +\infty.$$

Soluzione. Per qualunque valore del parametro t la funzione f è continua e surgettiva, con $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Perciò è un omeomorfismo di $\mathbb{R}$ in sé se, e solo se, è strettamente crescente. La sua derivata $f'(x) = 1 - \frac{2tx}{(1+x^2)^2}$ risulta avere come minimo valore $1 - \frac{3\sqrt{3}}{8}|t|$. Inoltre, questo valore è realizzato solo in un punto (salvo il caso degenere $t = 0$, quando f è la funzione identica). Si conclude che (a) f è un omeomorfismo se e solo se $|t| \le \frac{8}{3\sqrt{3}}$, e (b) f è un diffeomeomorfismo di classe C^∞ se e solo se $|t| < \frac{8}{3\sqrt{3}}$. Dall'espressione di f segue che $f(x)/x = 1 + o(1)$ per $x \to \infty$. Quindi si ha anche $g(y)/y = 1 + o(1)$ per $y \to \infty$. Inoltre

$$g(y) = y - \frac{t}{1+g(y)^2} = y - \frac{t}{y^2}\left(\frac{y}{g(y)}\right)^2\left(\frac{g(y)^2}{1+g(y)^2}\right) = y - \frac{t}{y^2}(1+o(1)) = y - \frac{t}{y^2} + o(\frac{1}{y^2})$$

per $y \to \infty$, che risponde alla richiesta del punto (c) con $a = b = 0$, $c = -t$.

Esercizio 3.

(a) Per ogni naturale n si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 (x \log x)^n dx.$$

(b) Usando il risultato del punto precedente si provi l'identità

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \ .$$

Soluzione. (a) Con il cambio di variabile $x = \exp \frac{u}{n+1}$, $dx = \frac{1}{n+1} \exp \frac{u}{n+1} du$, con $0 < u < +\infty$, ci si riconduce all'integrale di Eulero trovando

$$\int_0^1 (x \log x)^n dx = (-1)^n (n+1)^{-(n+1)} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = (-1)^n (n+1)^{-(n+1)} n!$$

(b) Dallo sviluppo della serie esponenziale si ha

$$x^{-x} = \exp(-x \log x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \log x)^n$$

e la convergenza è uniforme per $0 \le x \le 1$. Si può quindi integrare termine a termine, e si ottiene subito l'identità voluta, tenendo presente il punto (a).