Elementi di Analisi Matematica

Compito del 08/07/2011: soluzioni

Esercizio 1. Al variare del parametro reale positivo α, dire se $x = 0$ è un punto di massimo locale ovvero di minimo locale per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \sin|\sin x|^\alpha - |\sin\sin x|^\alpha\,.$$

Soluzione. La funzione f è composizione della funzione $g(x) := \sin|x|^\alpha - |\sin x|^\alpha$ con la funzione $\sin x$: cioè $f(x) = g(\sin x)$. Dai noti sviluppi di Taylor della funzione $\sin x$ e della funzione $(1+x)^\alpha$ si ha, per $x \to 0$:

$$\sin|x|^\alpha = |x|^\alpha - \frac{1}{6}|x|^{3\alpha} + o(|x|^{3\alpha}) = |x|^\alpha\left(1 - \frac{1}{6}|x|^{2\alpha} + o(|x|^{2\alpha})\right)$$

$$|\sin x|^\alpha = \left|x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right|^\alpha = |x|^\alpha\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)^\alpha = |x|^\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{6}x^2 + o(x^2)\right)$$

Quindi, per qualunque $\alpha > 0$,

$$g(x) = |x|^\alpha\left(-\frac{1}{6}|x|^{2\alpha} + \frac{\alpha}{6}x^2 + o(|x|^{2\alpha} + |x|^2)\right) \qquad (\text{per } x \to 0).$$

In particolare, se $0 < \alpha < 1$ vale $x^2 = o(|x|^\alpha)$ per $x \to 0$ e

$$g(x) = -\frac{1}{6}|x|^{3\alpha}(1 + o(1)) \qquad (\text{per } x \to 0)$$

e 0 è un massimo locale di g, mentre se $\alpha > 1$ vale $|x^\alpha| = o(x^2)$ per $x \to 0$ e

$$g(x) = \frac{\alpha}{6}|x|^{\alpha+2}(1 + o(1)) \qquad (\text{per } x \to 0)$$

e 0 è un minimo locale di g. Poiché la funzione $\sin x$ è localmente invertibile in 0 lo stesso vale anche per la funzione f. In alternativa, si può scrivere un analogo sviluppo per la funzione $f(x) = g(\sin x)$: essendo $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$ si ha subito che lo sviluppo di g trovato sopra in ciascuno dei due casi è anche uno sviluppo per f, e si conclude allo stesso modo. Infine nel caso $\alpha = 1$ la funzione f si riduce alla costante 0.

Esercizio 2.

(a) Sia $D \subset \mathbb{R}$ unione di k intervalli aperti. Provare che fra il numero di zeri di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e il numero di zeri della sua derivata sussiste la relazione:
$$\operatorname{card}\{f = 0\} \leq \operatorname{card}\{f' = 0\} + k\,.$$

(b) Dati tre polinomi P, Q, R a coefficienti reali, di grado rispettivamente p, q, r, si provi che il numero di soluzioni reali dell'equazione
$$P(x)e^{R(x)} = Q(x)$$
non supera
$$p + q + r + \min(p, q)\ .$$

Soluzione. 2a. Se f' ha infiniti zeri in D, non c'è nulla da dimostrare (come precisato, in questo contesto $\operatorname{card} S = +\infty$ per ogni insieme infinito S e non distinguiamo diverse cardinalità transfinite). Sia $\operatorname{card}\{f' = 0\} := n$. Gli n zeri di f' suddividono l'insieme D in al più $n + k$ intervalli disgiunti dove f' ha segno costante. Perciò su ciascuno di essi f è strettamente monotona, quindi iniettiva. Segue immediatamente la disuguaglianza. **2b.** Si consideri prima il caso in cui P e Q non hanno zeri in comune. Allora gli zeri di Q non sono soluzioni dell'equazione, ed essa è equivalente all'equazione per gli zeri della funzione
$$f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}e^{R(x)} - 1$$
definita sull'insieme
$$D := \mathbb{R} \setminus \{Q = 0\}.$$
La funzione f introdotta è certamente di classe C^1 sull'insieme D, il quale è unione di $q + 1$ intervalli aperti; essa ha derivata
$$f' := \frac{P'Q - PQ' + PQR'}{Q^2}e^{R(x)} \qquad x \in D := \mathbb{R} \setminus \{Q = 0\}.$$
che si annulla esattamente dove si annulla il polinomio $P'Q - PQ' + PQR'$, e pertanto ha al più $\deg(P'Q - PQ' + PQR') = p + q + r - 1$ zeri. Per la parte 2a dell'esercizio si trova dunque che f ha al più $p + q + r + q$ zeri. Infine, osservando che l'equazione iniziale è anche equivalente a $Q(x)e^{-R(x)} = P(x)$ si osserva che vale la stessa stima scambiando p e q, da cui la conclusione. Nel caso in cui P e Q hanno zeri in comune, essi hanno un fattore comune H e si può scrivere $P = HP_1$ e $Q = HQ_1$. Le soluzioni dell'equazione iniziale sono allora gli h zeri di H e le soluzioni dell'equazione $P_1(x)e^{R(x)} = Q_1(x)$, che cade nel caso precedente, per cui complessivamente vi sono al più $h + (p - h) + (q - h) + r + \min(p, q) - h \leq p + q + r + \min(p, q)$ soluzioni, e vale comunque la stima voluta.

Esercizio 3.

(a) Siano a_j numeri reali non negativi, per $1 \leq j \leq n$, e sia $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente non negativa. Provare la disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} f\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j\Big)\, a_k \leq \int_0^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

(b) Calcolare l'estremo superiore di

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 + \Big(\sum_{j=1}^{k} a_j\Big)^2}$$

al variare di tutte le successioni $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di numeri reali non negativi.

Soluzione. 3a. Il membro di sinistra della disuguaglianza è una somma inferiore di Riemann della funzione f relativa all'intervallo $[0, T]$ con $T := \sum_{j=0}^{n} a_j$. Precisamente, ponendo $t_k := \sum_{j=0}^{k} a_j$ per $0 \leq k \leq n$, esso si scrive

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Dunque esso è maggiorato dall'integrale di f su $[0, T]$, ed essendo f non negativa, quest'ultimo è maggiorato dall'integrale di f su $[0, \infty[$, il che prova la disuguaglianza.
3b. Nelle stesse ipotesi della parte 3a possiamo anche dire che l'estremo superiore delle somme

$$\sum_{k=1}^{n} f\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j\Big)\, a_k$$

al variare di $n \in N$ e $a_1, \dots a_n$ non negativi è proprio $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$. Infatti l'integrale improprio di una funzione positiva f sull'intervallo $[0, +\infty[$ è l'estremo superiore degli integrali di f sugli intervalli $[0, T]$ al variare di $T \geq 0$, e l'integrale di una funzione sull'intervallo $[0, T]$ è l'estremo superiore di tutte le somme inferiori alla Riemann relative a suddivisioni di $[0, T]$. Poiché una somma infinita di reali non negativi è l'estremo superiore delle somme parziali, si ha anche

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} f\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j\Big)\, a_k \,:\, \forall k \in \mathbb{N}\, a_k \geq 0\right\} = \int_0^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

In particolare, per la funzione $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, si trova per l'estremo superiore il valore richiesto

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$