FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Ricordiamo che una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se è continua in ogni punto x, vale a dire,

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x' \in X \ |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon .$$

Quindi la scelta del numero δ dipende dal punto x, oltre che dal numero ε.

Una classe importante di funzioni ha la proprietà che, assegnato il numero $\varepsilon > 0$, si possa trovare un numero δ per cui l'implicazione

" $|x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ "

valga per tutte le coppie di punti x, x' in X: queste sono dette perciò uniformemente continue:

DEF 1 Una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice UNIFORMEMENTE CONTINUA se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X, \forall x' \in X \ |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

ESEMPIO 1. Ogni funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k-lipschitziana è uniformemente continua: un numero δ con la proprietà richiesta è per esempio $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

ESEMPIO 2. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^2$ NON è uniformemente continua: per ogni $\delta > 0$ i due punti $x = \frac{1}{\delta}$, $x' = \frac{1}{\delta} + \delta$ hanno la proprietà che $|x - x'| = \delta$ e $|f(x) - f(x')| = \left|(\delta + \frac{1}{\delta})^2 - \frac{1}{\delta^2}\right| \geq 2$

Una nozione molto utile per esprimere la dipendenza di δ da ε è quella di Modulo di Continuità.

DEF. 2 Un modulo di continuità (nel seguito m.d.c) è una funzione

$$\omega : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$$

crescente, nulla in 0, continua in zero.

DEF 3 Si dice che una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "ha (o ammette) modulo di continuità ω" o anche "ω è un modulo di continuità per f" se e solo se $\forall x \in X \ \forall x' \in X \quad |f(x) - f(x')| \leq \omega(|x - x'|)$.
Si dice anche, per brevità, che f è "ω-continua".

ESEMPIO: Una funzione è k-Lipschitziana se e solo se ammette $\omega(t) = kt$ come MdC. Una funzione si dice Hölderiana di esponente $0<\alpha<1$ se ha MdC $\omega(t) = kt^\alpha$.

ESERCIZIO. (i) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ ammettono rispettivamente ω e ω' come moduli di continuità allora $g \circ f$ ammette $\omega' \circ \omega$ come m.d.c
(ii) Se $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ hanno m.d.c rispett. ω e ω' allora $f+g$ ha m.d.c $\omega + \omega'$; se di più sono limitate, $f \cdot g$ ha mdc $\|f\|_\infty \omega' + \|g\|_\infty \omega$.

ESERCIZIO. Trovare un m.d.c. per la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \ x \mapsto x^2$. È possibile trovare un mdc per f che assuma valori finiti in ogni punto?

PROP 1 Una funzione è Unif. Continua se e solo se ammette un modulo di continuità

DIM. (i) Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Definiamo, per ogni $t \in [0, \infty[$

$$\omega(t) := \sup\{ |f(x) - f(x')| : x \in X, x' \in X, |x - x'| \leq t \}$$

Poiché l'insieme a destra cresce al crescere del parametro t la funzione ω è crescente (si ricordi che $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$). Chiaramente, $\omega(0) = 0$; il fatto che ω sia continua in 0 discende dalla uniforme continuità di f:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \ \forall x' \in X \ |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$

dunque anche

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \omega(\delta) \leq \varepsilon$

ed essendo ω crescente, ciò prova che $\lim_{t \to 0} \omega(t) = 0$

(ii) Sia f una funzione con m. d. c. ω.
Dato $\varepsilon > 0$, essendo ω continua in 0 e $\omega(0) = 0$, vi è un $\delta > 0$ tale che $\omega(\delta) \leq \varepsilon$. Allora per ogni $x \in X, x' \in X$ con $|x - x'| \leq \delta$ si ha, per definizione di $\omega(\delta)$,

$$|f(x) - f(x')| \leq \omega(\delta) \leq \varepsilon,$$

e ciò prova che f è uniformemente continua.

QED

TEOR. (Heine-Cantor). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e sia X compatto.
Allora f è anche uniformemente continua.

DIM. Supponiamo per assurdo che f non sia continua: ciò vuol dire, per la DEF 1,

$\exists\, \varepsilon_0 > 0$ t.che $\forall \delta > 0$ $\exists\, x, x' \in X$ tali che

$$\begin{cases} |x - x'| \leq \delta \\ |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

In particolare, prendendo $\delta = \frac{1}{n}$ per $n = 1, 2, \ldots$, si definiscono due successioni $(x_n)_n$ e $(x'_n)_n$ in X tali che $|x_n - x'_n| \leq \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$.

Poichè X è compatto la successione $(x_n)_n$ ammette una sottosuccessione convergente $(x_{n_k})_k$,

$$x_{n_k} \longrightarrow \bar{x} \quad (k \to +\infty)$$

Quindi x'_{n_k} converge allo stesso limite, poichè

$$|x'_{n_k} - \bar{x}| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \bar{x}| \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

Essendo f continua, $f(x_{n_k}) \to f(\bar{x})$ e $f(x'_{n_k}) \to f(\bar{x})$

$$\varepsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(\bar{x})| + |f(x'_{n_k}) - f(\bar{x})| \to 0$$

che è assurdo. Dunque f è uniformemente continua.

QED

ESERCIZIO. Si dimostri il teor. di Heine costruendo un modulo di cont. per la funzione f. Si definisca $\omega(t)$ come nella PROP 1 e si dimostri che è continua in 0 usando l'ipotesi di compattezza di X.

ESERCIZIO. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente continua e si assuma che X è un intervallo di $\mathbb{R}$. Si provi che in questo caso la funzione ω definita nella PROP 1 è una funzione concava.

ESERCIZIO - Sia, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) \doteq \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$$

e sia, per $k \in \mathbb{N}$, $u_k(x) \doteq 2^{-k} u(2^k x)$

Provare che la funzione "Montblanc"

$$f(x) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

ammette un m. di cont della forma

$$\omega(t) = at \left(|\log t| + b \right)$$

ESERCIZIO Sia $u : E \to \mathbb{R}$ con $|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\beta}$
e $w : E \times E \to \mathbb{R}$ la funz $w(x,y) = \dfrac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\alpha}}$ $(0 < \alpha < \beta \leq 1)$
allora $|w(z) - w(z')| \leq 6C |z - z'|^{\beta - \alpha}$ $\left(|z| = \max(|z_1|, |z_2|)\right)$