Elementi di Analisi Matematica

Compito del 10 giugno 2011

Esercizio 1. Sia (a_n) una successione divergente di numeri positivi. Dimostrare che l'insieme

$$\left\{ \frac{a_n}{k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N},\ k \geq 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

è denso in $[0, +\infty[$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = x - \log x$.

(a) Mostrare che f è un omeomorfismo da $[1, +\infty[$ a $[1, +\infty[$.

(b) Detta g la funzione inversa di f, mostrare che

$$g(y) = y + \log y + o(1), \qquad \text{per } y \to +\infty.$$

Esercizio 3.

(a) Trovare una primitiva di $e^{-x} \sin x$.

(b) Mostrare che l'integrale improprio

$$I = \int_0^\infty e^{-x} |\sin x| \, dx$$

è convergente.

(c) Calcolare I.

Soluzione 1. È sufficiente dimostrare che per ogni $0 < \alpha < \beta$ esistono $n, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, tali che

$$\alpha \leq \frac{a_n}{k} \leq \beta.$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia

$$k_n := \left\lfloor \frac{a_n}{\alpha} \right\rfloor.$$

Dalla disuguaglianza

$$k_n \leq \frac{a_n}{\alpha} < k_n + 1,$$

segue che

$$k_n\alpha \leq a_n < (k_n + 1)\alpha = k_n\beta\, \frac{k_n + 1}{k_n}\, \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dato che $k_n \to +\infty$, da cui $(k_n + 1)/k_n \to 1$, e $\alpha/\beta < 1$, esiste n tale che

$$\frac{k_n + 1}{k_n}\, \frac{\alpha}{\beta} < 1.$$

Per tale n si ha perciò

$$k_n\alpha \leq a_n < k_n\beta,$$

da cui

$$\alpha \leq \frac{a_n}{k_n} < \beta.$$

Soluzione 2. (a) La funzione f è continua, $f(1) = 1$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dunque per il teorema dei valori intermedi

$$f([1, +\infty[) \supset [1, +\infty[.$$

Inoltre la sua derivata

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

è strettamente positiva per $x > 1$, perciò f è strettamente crescente su $[1, +\infty[$ e in particolare $f(x) \geq 1$ per ogni $x \geq 1$. Concludiamo che la funzione continua f è strettamente crescente sull'intervallo $[1, +\infty[$ e

$$f([1, +\infty[) = [1, +\infty[.$$

Da ciò segue che f è un omeomorfismo da $[1, +\infty[$ a $[1, +\infty[$.

(b) In particolare, per $y \to +\infty$ si ha

$$x := g(y) \to +\infty,$$

quindi anche

$$\frac{y}{x} = \frac{x - \log x}{x} \to 1.$$

Allora

$$g(y) = y + \log x = y + \log y + \log \frac{y}{x} = y + \log y + o(1)$$

per $y \to +\infty$.

Soluzione 3. (a) Una verifica diretta mostra che la funzione

$$-\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x)$$

è una primitiva di $e^{-x} \sin x$. Tale primitiva può essere trovata integrando per parti due volte, oppure osservando che

$$e^{-x} \sin x = \operatorname{Im} e^{(i-1)x}$$

e che una primitiva di $e^{(i-1)x}$ è

$$\frac{1}{i-1} e^{(i-1)x}.$$

(b) Risulta

$$0 \leq e^{-x} |\sin x| \leq e^{-x},$$

e la funzione e^{-x} è integrabile in senso improprio su $[0, \infty[$, in quanto

$$\int_0^a e^{-x}\, dx = 1 - e^{-a} \to 1, \qquad \text{per} \quad a \to +\infty.$$

Per confronto, anche $e^{-x} |\sin x|$ risulta integrabile in senso improprio su $[0, \infty[$.

(c) Calcoliamo:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)}|\sin x|\,dx$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{1-e^{-\pi}}\frac{1+e^{-\pi}}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}.$$