

Elementi di Calcolo delle Variazioni

Prova scritta 8 giugno 2007

1. Sia $p > 1$. Dimostrare che esiste il seguente minimo:

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 |u'(x)|^2 dx \mid u \in W_0^{1,2}(-1, 1), \int_{-1}^1 |u(x)|^p dx = 1 \right\}.$$

2. Dimostrare che ogni u minimizzante è di classe $C^2([-1, 1])$.
3. Scrivere l'equazione di Eulero.
4. Mostrare che ogni u minimizzante ha segno costante.
5. Mostrare che ogni u minimizzante è di classe $C^\infty([-1, 1])$ ed è concava oppure convessa.
6. Mostrare che c'è un'unica u minimizzante tale che $u \geq 0$, e determinarla nel caso $p = 2$.
7. Studiare i casi limite $p \rightarrow 1$ e $p \rightarrow +\infty$.