Esercizi 29.02.2012

1. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$y'(x) = xy(x)^2, \qquad y'(x) = \frac{2xy(x)}{1+x^2}, \qquad y'(x)\tan x + \tan y(x) = 0.$$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} xy' = 1 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y' = e^{x-y}\cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y' = \frac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}.$$

3. Dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni.

4. Determinare le curve $y = y(x)$ la cui retta tangente nel punto $(x, y(x))$ incontra l'asse delle x nel punto $(-x, 0)$.

5. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \qquad y' = x(y^3 - y), \qquad 4y' = y\tan x - \frac{\sin x}{y^3}.$$

6. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

7. Determinare tutte le soluzioni delle equazioni differenziali:

$$y' = (x+y)^2, \qquad y' = e^{x+y}, \qquad e^x y' = e^x + e^y.$$

8. Studiare al variare del parametro positivo α le soluzioni $y \geq 0$ dell'equazione

$$y' = y - y^\alpha.$$