

Esercizi 28.03.2012

1. Sia $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1 tale che $X(0) = 0$ e $DX(0)$ sia invertibile. Dimostrare che 0 è un punto di equilibrio isolato.

2. Studiare nel piano delle fasi l'equazione

$$\ddot{x} = a^2 - x^2,$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Stabilire in particolare quando:

- (a) esistono orbite periodiche;
- (b) esistono orbite non periodiche ma definite su tutto $\mathbb{R}$.

3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e sia

$$u'(t) = f(u(t))$$

la corrispondente equazione scalare.

- (a) Se $f(0) = 0$ e $f'(0) < 0$ allora il punto di equilibrio 0 è asintoticamente stabile e, se u_0 è sufficientemente vicino a 0, la soluzione u tale che $u(0) = u_0$ converge esponenzialmente a zero:

$$|u(t)| \leq ce^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0,$$

per c e λ costanti positive opportune.

- (b) Esaminare il caso $f \in C^3(\mathbb{R})$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) < 0$.

4. Sia

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y), \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases}$$

un sistema bidimensionale, con $F, G \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Si dimostri che se $F(x_0, y_0) \neq 0$ allora la soluzione $(x(t), y(t))$ tale che $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ è localmente il grafico di una funzione $u \in C^1]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$, ossia

$$\{(x(t), y(t)) \mid \tau_1 < t < \tau_2\} = \{(x, u(x)) \mid |x - x_0| < \epsilon\}, \quad \text{con } \tau_1 < 0 < \tau_2, \text{ e } \epsilon > 0,$$

dove u è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{G(x, u)}{F(x, u)}, \\ u(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Formulare un analogo risultato nel caso $G(x_0, y_0) \neq 0$ e concludere che se (x_0, y_0) non è un punto di equilibrio allora almeno uno di questi due fatti deve valere.

5. Studiare il ritratto di fase dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = e^y, \\ \dot{y} = e^y \cos x, \end{cases}$$

determinando, in particolare, i punti critici, le equazioni differenziali del tipo (1) che descrivono le traiettorie, le soluzioni di queste equazioni (se possibile) e i versi di percorrenza.

6. Studiare la stabilità dell'origine per il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x^5. \end{cases}$$

7. Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$. Dimostrare che l'origine è un punto di equilibrio per il sistema del primo ordine associato all'equazione

$$\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = 0$$

e studiarne la stabilità.

8. Si consideri la seguente variante del sistema di Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy - hx^2, \\ \dot{y} = -cy + dxy - ky^2, \end{cases}$$

dove i parametri a, b, c, d, h, k sono numeri positivi.

- (a) Si interpreti questo modello in termini di prede $x(t)$ e predatori $y(t)$.
- (b) Stabilire se esistono condizioni sui parametri che implicano l'estinzione dei predatori per ogni condizione iniziale appartenente ad un aperto non vuoto.