

Esercizi 22.02.2012

1. Determinare l'involuppo della famiglia di rette che intersecano gli assi coordinati in due punti a distanza 1.
2. Determinare l'involuppo della famiglia di ellissi con lo stesso centro, assi paralleli, e somma dei semiassi uguale a 2.
3. Determinare l'involuppo della famiglia di rette che individuano con gli assi coordinati un triangolo di area 1.
4. (*Cissoide di Diocle*) Determinare l'involuppo della famiglia di cerchi passanti per 0 con centro sulla parabola $y = x^2$.
5. (*Lemniscata di Bernoulli*) Determinare l'involuppo della famiglia di cerchi passati per 0 con centro sull'iperbole $y^2 - x^2 = 1$.
6. Dati $s > 0$ e $t > 0$, sia $T_{s,t}$ il triangolo nel piano cartesiano di vertici $(0, 0)$, $(s, 0)$ e $(0, t)$. Determinare l'insieme

$$X_\alpha = \bigcup_{\substack{(s,t) \in]0, +\infty[^2 \\ s^\alpha + t^\alpha = 1}} T_{s,t},$$

dove $\alpha > 0$ è fissato.

7. (*Curva di sicurezza*) Determinare l'involuppo della famiglia delle traiettorie di un proiettile lanciato dall'origine con velocità 1 ed angolo con il terreno arbitrario.
8. (*Equazione di Clairaut*) Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale della forma

$$y(x) = xy'(x) + f(y'(x))$$

è costituito da una famiglia di funzioni affini e dal suo involuppo. Determinare tutte le soluzioni delle equazioni

$$y = xy' + (y')^3, \quad y = xy' + \sqrt{y'}, \quad y = \frac{x}{y'} + (y')^2.$$