

Esercizi 21.03.2012

1. Integrare esplicitamente e tracciare i ritratti di fase dei seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -\frac{1}{4}y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - y \end{cases}.$$

2. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases},$$

con $ad - bc = 0$. Si provi che si verifica una delle seguenti situazioni:

- (a) vi è una retta di punti fissi, le altre orbite sono rettilinee e avvicinano oppure si allontanano da essa per $t \rightarrow +\infty$;
- (b) vi è una retta di punti fissi e le altre orbite sono rettilinee ed ad essa parallele;
- (c) tutti i punti del piano sono fissi.

3. Si consideri l'equazione delle oscillazioni smorzate

$$mu''(t) + \mu u'(t) + \kappa u(t) = 0,$$

dove m , μ e κ sono costanti positive (rispettivamente, la massa, il coefficiente di smorzamento e la costante elastica). Si trasformi questa equazione del secondo ordine in un sistema del primo ordine e si analizzi qualitativamente quest'ultimo al variare dei parametri m , μ e κ .

4. Due specie di animali vivono nella medesima nicchia ecologica e sono in competizione per il cibo. Indicando con x e y la popolazione delle due specie, il più semplice modello è dato da

$$\begin{cases} x' = ax - by, & x(0) = x_0 > 0, \\ y' = cx - dy, & y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

dove a, b, c, d sono costanti positive. Discutere il comportamento qualitativo delle soluzioni al variare dei parametri. Integrare esplicitamente il sistema nel caso $a = c = 2$, $b = 1/5$, $d = 1/10$, $x_0 = 100$, $y_0 = 200$, determinando se una delle due specie si estingue.

5. Si studi il comportamento qualitativo delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{y}{\log \sqrt{x^2 + y^2}} \\ y' = -y + \frac{x}{\log \sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$

6. Si costruisca un campo vettoriale di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ il cui flusso abbia un punto fisso in $(0, 0)$ ed abbia per orbite periodiche tutti e soli i cerchi di raggio $1/n$ centrati in $(0, 0)$, per $n \geq 1$ intero.

7. Sia $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale tale che $X(0) = 0$. Supponiamo che la matrice $A = DX(0)$ sia diagonalizzabile ed abbia tutti gli autovalori negativi. Costruire una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che abbia minimo assoluto in 0 e tale che per ogni u_0 sufficientemente vicino a 0, detta u la soluzione del problema di Cauchy

$$u'(t) = X(u(t)), \quad u(0) = u_0,$$

la funzione $f \circ u$ risulti decrescente su $[0, +\infty[$ e $u(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.