Esercizi 16.05.2012

1. Si calcolino i seguenti integrali :

$$\begin{array}{cl}
\int_A x\sin(x+y)\,dx\,dy, & A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<\pi/2,\ 0<y<1-x\right\};\\
\int_A x(1-y)\,dx\,dy, & A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x^2+y^2\le 1,\ 0\le y\le x\right\};\\
\int_A \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy, & A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le 2,\ 1/x\le y\le x\right\};\\
\int_A (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz, & A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2\le r^2,\ y^2\le r^2,\ z^2\le r^2\right\};\\
\int_E x^2\,dx\,dy\,dz, & E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2<1\right\}.
\end{array}$$

2. Determinare il volume dell'intersezione tra i cilindri:

$$C_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1\right\}, \qquad C_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2\le 1\right\}.$$

3. Mostrare che se $a>0$ e $b>0$, la funzione

$$f(x)=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$$

è sommabile su $]0,+\infty[$ e calcolarne l'integrale.

4. Il baricentro di un insieme $A\subset\mathbb{R}^n$ è il punto $\bar{x}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x_n})$ con

$$\bar{x}_j=\frac{1}{m(A)}\int_A x_j\,dx.$$

Determinare il baricentro degli insiemi

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\sin x\right\}, \quad T= \text{ triangolo di vertici } (0,0),\ (1,-1),\ (1,1).$$

5. (Teorema di Pappo) Sia A un insieme limitato misurabile contenuto nel piano x,z e sia V il solido che si ottiene da A mediante una rotazione completa attorno all'asse z. Dimostrare che

$$\mathrm{vol}(V)=2\pi\bar{x}\,\mathrm{area}(A),$$

dove $\bar{x}$ è la coordinata x del baricentro di A.

6. Il momento di inerzia di un insieme $A\subset\mathbb{R}^n$ rispetto ad una retta r è l'integrale

$$\int_A d(x,r)^2\,dx,$$

dove $d(x,r)$ indica la distanza del punto x dalla retta r.

(a) Calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi coordinati dell'insieme

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\sin x\right\}.$$

(b) Detti I_x, I_y e I_z i momenti di inerzia di un solido in $\mathbb{R}^3$, dimostrare le disuguaglianze

$$I_x+I_y>I_z, \quad I_y+I_z>I_x, \quad I_z+I_x>I_y.$$

7. Determinare il volume dell'ellissoide delimitato dalla superficie di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

8. Calcolare

$$\begin{array}{ll}
\int_A \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, & A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a^2 < x^2+y^2+z^2 < b^2\right\}; \\
\int_A x^2\,dx\,dy\,dz, & A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z\ge 0,\ 3(x^2+y^2)\le z_2\right\}; \\
\int_A \log\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, & A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\right\}.
\end{array}$$

9. Sia $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ un insieme di misura a e sia $z=(0,\dots,0,h)\in\mathbb{R}^n$. Determinare la misura del cono

$$C = \{tx+(1-t)z \mid x\in A,\ t\in[0,1]\}.$$

10. Sia $f\in L^1(1,+\infty)$ tale che

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

Calcolare

$$\int_A f(xy)\,dx\,dy$$

dove $A\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>1/x,\ 0<x<y<4x\right\}$.

11. Calcolare

$$\int_B \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz,$$

dove B indica la palla unitaria di $\mathbb{R}^3$.

12. Determinare il volume del tetraedro:

$$T = \{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1>0,\ x_2>0,\dots,x_n>0,\ x_1+x_2+\dots x_n<a\},$$

con $a>0$.

13. Siano $u_1,u_2,\dots,u_n\in\mathbb{R}^n$ e sia E il più piccolo sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ che contiene $0,u_1,u_2,\dots,u_n$. Mostrare che

$$m(E) = \frac{1}{n!}\det U,$$

dove U è la matrice con colonne u_j.

14. (Coordinate polari in $\mathbb{R}^n$) In $\mathbb{R}^n$ il passaggio alle coordinate polari è definito dalle seguenti equazioni:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 &=& r\cos\varphi_1 \\
x_2 &=& r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\
x_3 &=& r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\
\vdots && \\
x_{n-1} &=& r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\
x_n &=& r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},
\end{array}$$

dove

$$(r,\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-2},\varphi_{n-1}) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,\pi[\times\cdots\times]0,\pi[\times]0,2\pi[.$$

(a) Mostrare che $(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2} = r^2$.

(b) Mostrare che il determinante del differenziale dell'applicazione definita sopra vale

$$r^{n-1}(\sin\varphi_1)^{n-2}(\sin\varphi_2)^{n-3}\dots\sin\varphi_{n-2}.$$

(c) Mostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\big(\|x\|\big)\,dx = n\,\omega_n\int_0^\infty f(r)r^{n-1}\,dr,$$

dove ω_n indica la misura della palla unitaria in dimensione n.