Esercizi 29.02.2012

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = x - y(x)^2. \tag{1}$$

(a) Mostrare che se y è soluzione di (1), la funzione $u(x) = e^{\int_0^x y(t)\,dt}$ è soluzione di un'equazione lineare del secondo ordine, che può essere risolta per serie.

(b) Discutere, al variare della condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, il comportamento della soluzione di (1), individuando l'intervallo massimale di esistenza, le regioni di monotonia e di convessità.

2. L'equazione

$$u'(t) = qu(t) - mu(t)^2.$$

dove q e m sono numeri positivi, rappresenta un modello di crescita di una popolazione. Discutere, al variare della condizione iniziale $u(0) = u_0 \geq 0$, il comportamento della soluzione u e valutare il suo andamento per $t \to \infty$.

3. Studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

individuando, in particolare, gli intervalli massimali di esistenza, le regioni di monotonia e convessità e gli andamenti asintotici.

4. Studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{y},$$

individuando, in particolare, gli intervalli massimali di esistenza, le regioni di monotonia e convessità e gli andamenti asintotici.