Parte III

Problemi variazionali

1 Un'equazione ellittica semilineare

1.1 Metodo diretto

Richiami lineari. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, con bordo di classe C^∞. Consideriamo l'operatore $-\Delta$ su $L^2(\Omega)$, con dominio $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Si tratta di un operatore (non limitato) autoaggiunto con inverso compatto. Il suo spettro consiste di autovalori reali

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$$

che tendono a $+\infty$ (un autovalore ripetuto k volte indica una molteplicità k). Il primo autovalore è sempre semplice e vale la seguente caratterizzazione variazionale di Rayleigh-Ritz

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H^1_0(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega |u|^2 \, dx}. \tag{1}$$

La relativa autofunzione u_1 non cambia segno su Ω, dunque possiamo sceglerla positiva. Per la dimostrazione di questi fatti si veda ad esempio [Bre83].

Un problema di Dirichlet semi-lineare. Ci proponiamo di studiare l'esistenza di soluzioni positive u del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = & = & u|u|^{p-2} & \text{in } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Dimostreremo il seguente:

1.1 Teorema. *Sia $p > 2$. Nel caso $n \geq 3$ supponiamo inoltre $p < 2^* := 2n/(n-2)$. Se $\lambda < \lambda_1$ allora esiste $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzione positiva di (2).*

Consideriamo il funzionale

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \big) \, dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx.$$

Questo funzionale è ben definito su $H^1_0(\Omega)$. Infatti, per ogni $p \leq 2^*$ lo spazio $H^1_0(\Omega)$ si immerge con continuità in $L^p(\Omega)$. Ricordiamo che per $p < 2^*$ questa immersione è anche compatta. La compattezza di questa immersione sarà cruciale più avanti, di qui l'ipotesi $p < 2^*$.

Si verifica facilmente che f è di classe C^1, e che il suo differenziale è

$$Df(u)[v] = \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla v - \lambda u v \big) \, dx - \int_\Omega |u|^{p-2} u v \, dx. \tag{3}$$

Quindi i punti critici di f sono soluzioni deboli di (2), cioè verificano

$$\int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla \varphi - \lambda u \varphi \big) \, dx - \int_\Omega |u|^{p-2} u \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

La teoria delle soluzioni deboli assicura che le soluzioni deboli di questo problema sono in realtà forti, cioè appartengono a $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, si annullano sul bordo di Ω, erisolvono (2) (questo punto sarà discusso in una prossima lezione).

Il funzionale f non è limitato inferiormente su $H_0^1(\Omega)$, quindi non possiamo dimostrare l'esistenza di un punto critico minimizzandolo su questo spazio (come vedremo più avanti, ci sarebbe un minimo locale in 0, che però non è una soluzione interessante). Consideriamo allora l'insieme

$$S = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \int_\Omega |u|^p \, dx = 1 \right\}.$$

Si tratta di una superficie di livello del funzionale di classe C^1

$$g(u) = \int_\Omega |u|^p \, dx, \tag{4}$$

e

$$Dg(u)[u] = p \int_\Omega |u|^p \, dx = p \neq 0, \quad \forall u \in S,$$

dunque S è una ipersuperficie di classe C^1. Il funzionale quadratico

$$h(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \big) \, dx$$

è di classe C^∞ su $H_0^1(\Omega)$. Se $\bar{u} \in S$ è un punto di minimo per la restrizione di h ad S, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange esiste un numero reale μ tale che

$$Dh(\bar{u}) - \mu Dg(\bar{u}) = 0,$$

ossia

$$\int_\Omega \big(\nabla \bar{u} \cdot \nabla v - \lambda \bar{u} v \big) \, dx - \mu \int_\Omega |\bar{u}|^{p-2} \bar{u} v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

Per $v = \bar{u}$ si trova

$$0 = \int_\Omega \big(|\nabla \bar{u}|^2 - \lambda \bar{u}^2 \big) \, dx - \mu \int_\Omega |\bar{u}|^p \, dx = 2h(\bar{u}) - \mu,$$

da cui deduciamo che μ ha lo stesso segno di $h(\bar{u})$. Supponiamo che $h(\bar{u}) > 0$. Allora sostituendo $\bar{u} = \mu^\alpha u$ in (5) troviamo

$$\mu^\alpha \int_\Omega \big(\nabla \bar{u} \cdot \nabla v - \lambda \bar{u} v \big) \, dx - \mu^{1+\alpha(p-1)} \int_\Omega |\bar{u}|^{p-2} \bar{u} v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Se scegliamo α in modo che $1 + \alpha(p-1) = \alpha$, ossia $\alpha = 1/(2-p)$, deduciamo che $u = \mu^{-\alpha} \bar{u} = \mu^{1/(p-2)} \bar{u}$ è soluzione del problema (2).

Basta quindi dimostrare che h ammette minimo su S e che tale minimo è positivo. Infatti, dato che $u \in S$ implica $|u| \in S$ e $h(|u|) = h(u)$, la funzione minimizzante u può essere scelta non negativa. Il principio del massimo forte implicherà allora $u > 0$ in Ω (questo punto sarà discusso in una prossima lezione).

Per dimostrare l'esistenza di un minimo positivo è sufficiente usare il metodo diretto. La funzione h è debolmente semi-continua inferiore su $H_0^1(\Omega)$: infatti $u \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$ lo è, essendo il quadrato di una norma, e $u \mapsto \int_\Omega u^2 \, dx$ è debolmente continua in $H_0^1(\Omega)$, dato che l'immersione $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ è compatta - equivalentemente, continua dalla topologia debole alla forte - e la norma L^2 è ovviamente continua rispetto alla topologia forte di L^2.

L'ipotesi $\lambda < \lambda_1$ implica che h è debolmente coerciva su $H_0^1(\Omega)$, ossia che i suoi sottolivelli sono debolmente compatti. Infatti la caratterizzazione (1) di λ_1 implica la disuguaglianza di Poincaré

$$\int_\Omega u^2 \, dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

da cui

$$h(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \tag{6}$$

è una forma quadratica coerciva. Quindi i sottolivelli $\{h \leq c\}$ di h sono (debolmente chiusi e) limitati, e dunque debolmente compatti poichè $H^1_0(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, in particolare è riflessivo.

Infine, la funzione g definita in (4) è debolmente continua su $H^1_0(\Omega)$. Come prima, questo segue dal fatto che l'immersione $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ è compatta (poichè $p < 2^*$!), equivalentemente continua dalla topologia debole alla forte. Pertanto l'insieme S è debolmente chiuso. Concludiamo cha la restrizione della funzione h a S è debolmente semicontinua inferiore (lo è su tutto $H^1_0(\Omega)$) e debolmente coerciva (lo è su tutto $H^1_0(\Omega)$ e S è debolmente chiuso). Per il teorema di Weierstrass, h ammette minimo su S. Dato che $h \geq 0$ e si annulla solamente in 0, che non appartiene ad S, concludiamo che il minimo è positivo, come richiesto.

Geometria del funzionale f. Dato che $p > 2$,

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) dx + o\left(\|u\|^2_{H^1_0} \right).$$

Inoltre, la prima forma quadratica è coerciva poichè $\lambda < \lambda_1$. Quindi 0 è un punto di minimo locale stretto per f.

D'altra parte, per ogni $u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$ si trova che

$$f(ru) = \frac{r^2}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) dx - \frac{r^p}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx$$

tende a $-\infty$ per $r \to +\infty$.

Questi due fatti assieme implicano che se $a > 0$ è sufficientemente piccolo allora il sottolvello $\{f < a\}$ è sconnesso: contiene un intorno chiuso dell'origine tutto contenuto in una palla aperta, ma contiene anche vettori di norma arbitrariamente grande. In questa situazione è lecito aspettarsi un punto critico di sella. È quanto ci proponiamo di dimostrare nella prossima sezione, producendo una dimostrazione alternativa dell'esistenza di un punto critico $u \neq 0$ di f.

1.2 Il teorema del passo montano

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $f : H \to \mathbb{R}$ un funzionale di classe C^1.

1.2 DEFINIZIONE. *Una successione $(u_n) \subset H$ si dice di Palais-Smale per f al livello $c \in \mathbb{R}$ se $f(u_n) \to c$ e $Df(u_n) \to 0$. Si dice che f soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello c se ogni successione di Palais-Smale al livello c ha una sottosuccessione convergente.*

Sia $a \in \mathbb{R}$, e supponiamo che il sottolivello $\{f < a\}$ non sia connesso: quindi esistono due aperti disgiunti non vuoti $A, B \subset H$ tali che $\{f < a\} = A \cup B$. Consideriamo l'insieme Γ di tutti i sostegni di curve continue $u : [0, 1] \to H$ tali che $u(0) \in A$ e $u(1) \in B$, e definiamo

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma} f(u).$$

Dato che l'insieme Γ è non vuoto e consiste di insiemi compatti, $c < +\infty$. Dato che ogni curva $\gamma \in \Gamma$ ha intersezione non vuota con $H \setminus (A \cup B) = \{f \geq a\}$, risulta $c \geq a$.

1.3 TEOREMA. *Nelle ipotesi sopra, supponiamo che f soddisfi la condizione di Palais-Smale al livello c. Allora c è un valore critico di f.*

Dimostrazione. Dimostriamo questo teorema con l'ipotesi aggiuntiva che il differenziale di f sia localmente Lipschitziano. Vedremo come rimuovere questa ipotesi nel paragrafo seguente. Allora il campo vettoriale

$$X(u) = \frac{\nabla f(u)}{\|\nabla f(u)\|^2 + 1}$$

è localmente Lipschitziano. Essendo anche limitato, ed essendo H completo, il flusso del campo $-X$, cioè la soluzione $\phi : \mathbb{R} \to H \to H$ di

$$\partial_t \phi(t, u) = -X(t, \phi(t, u)), \quad \phi(0, u) = u,$$

è ben definito. Osserviamo che f decresce lungo le linee di flusso di ϕ,

$$\frac{d}{dt} f(\phi(t, u)) = -Df(\phi(t, u))[X(\phi(t, u))] = -\frac{\|\nabla f(\phi(t, u))\|^2}{\|\nabla f(\phi(t, u))\|^2 + 1} \leq 0.$$

Se per assurdo c non fosse un livello critico, per la condizione di Palais-Smale a livello c, esisterebbe $\epsilon > 0$ tale che $\|Df(u)\| \geq \epsilon$ per ogni $u \in \{c - \epsilon \leq f \leq c + \epsilon\}$ (lo si verifichi). Dalla definizione di X, segue che

$$Df(u)[X(u)] = \frac{\|\nabla f(u)\|^2}{\|\nabla f(u)\|^2 + 1} > \delta \quad \forall u \in \{c - \epsilon \leq f \leq c + \epsilon\},$$

per qualche $\delta > 0$. Se l'orbita $\phi([0, t], u)$, $t > 0$, è tutta contenuta in $\{c - \epsilon \leq f \leq c + \epsilon\}$, si ha

$$\begin{aligned} c - \epsilon \leq f(\phi(t, u)) &= f(u) + \int_0^t \frac{d}{ds} f(\phi(s, u))\, ds \\ &= f(u) - \int_0^t Df(\phi(s, u))[X(\phi(s, u))]\, ds < c + \epsilon - t\delta, \end{aligned}$$

da cui $t < 2\epsilon/\delta$. Ne segue che

$$\phi\left(\frac{2\epsilon}{\delta}, \{f \leq c + \epsilon\}\right) \subset \{f \leq c - \epsilon\}. \tag{7}$$

Per la definizione di c, possiamo trovare $\gamma_0 \in \Gamma$ tale che $\max_{u \in \gamma_0} f(u) \leq c + \epsilon$. Dato $t \geq 0$, consideriamo la curva

$$\gamma_t := \phi(t, \gamma_0).$$

Dato che A e B sono positivamente invarianti per il flusso ϕ (poichè f decresce lungo le linee di flusso), γ_t è una curva con il primo estremo in A e l'altro in B, quindi è un elemento di Γ. posto $T = 2\epsilon/\delta$, per la (7) risulta

$$\max_{u \in \gamma_T} f(u) \leq c - \epsilon.$$

Questo viola la definizione di c. L'assurdo mostra che c deve essere un valore critico. □

La condizione di Palais-Smale non può essere eliminata dalle ipotesi di questo teorema, nemmeno in dimensione finita. Si consideri infatti la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^{-y} - x^2.$$

Il sottolivello $\{f < 0\}$ ha due componenti connesse, $\{x > e^{-y/2}\}$ e $\{x < -e^{-y/2}\}$, però f non ha punti critici. In effetti, $(0, n)$ è una successione di Palais-Smale a livello 0 illimitata.

1.3 Pseudo-Gradienti

Abbiamo dimostrato il teorema di passo montano per una funzione di classe $C^{1,1}$ su uno spazio di Hilbert. Il risultato continua a valere per funzioni di classe C^1 su spazi di Banach. La difficoltà qui è che non possiamo usare il flusso gradiente per deformare sottolivelli: su uno spazio di Banach il gradiente di una funzione non è definito, e anche su uno spazio di Hilbert il gradiente di una funzione soltanto C^1 non genera un flusso. In realtà nella dimostrazione del teorema di passo montano non è necessario deformare i sottolivelli lungo la direzione di massima discesa di f - ossia $-\nabla f$ - basta una direzione dove f decresca abbastanza. Queste considerazioni giustificano la seguente:

1.4 Definizione. *Sia E uno spazio di Banach, $f \in C^1(E)$, $\tilde{E} = \{u \in E \mid Df(u) \neq 0\}$. Un campo $X : \tilde{E} \to E$ si dice uno* pseudo-gradiente *per f se:*

(i) X è localmente Lipschitziano;

(ii) $\|X(u)\| < 2\max\{\|Df(u)\|, 1\}$;

(iii) $Df(u)[X(u)] > \min\{\|Df(u)\|, 1\}\|Df(u)\|$.

Dalla seconda proprietà, uno pseudo-gradiente si estende con continuità a tutto E assegnandogli il valore 0 nei punti critici di f, ma in generale questa estensione non sarà localmente Lipschitziana.

1.5 Proposizione. *Ogni $f \in C^1(E)$ possiede un campo pseudo-gradiente.*

Dimostrazione. Dato $u \in \tilde{E}$, sia $v(u) \in E$ un vettore tale che

(ii') $\|v(u)\| < 2\max\{\|Df(u)\|, 1\}$;

(iii') $Df(u)[v(u)] > \min\{\|Df(u)\|, 1\}\|Df(u)\|$.

Per la continuità di Df possiamo trovare $U(u)$ intorno di u tale che per ogni $u' \in U(u)$ risulti

(ii") $\|v(u)\| < 2\max\{\|Df(u')\|, 1\}$;

(iii") $Df(u')[v(u)] > \min\{\|Df(u')\|, 1\}\|Df(u')\|$.

Dato che $\tilde{E}$ è paracompatto (è uno spazio metrico), esiste $\{U_j\}_{j\in J}$ raffinamento localmente finito del ricoprimento $\{U(u)\}_{u\in\tilde{E}}$. Sia u_j un elemento di $\tilde{E}$ tale che $U_j \subset U(u_j)$. Sia $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ una partizione dell'unità Lipschitziana subordinata al ricoprimento $\{U_j\}_{j\in J}$. Ad esempio φ_j può essere definita come

$$\varphi_j(u) := \frac{\psi_j(u)}{\sum_{i\in J}\psi_i(u)},$$

dove

$$\psi_j(u) := \operatorname{dist}(u, \tilde{E} \setminus U_j).$$

Definiamo il campo $X : \tilde{E} \to E$ come

$$X(u) := \sum_{j\in J} \varphi_j(u) v(u_j).$$

Il campo X risulta localmente Lipschitziano perchè le φ_j sono Lipschitziane e la somma sopra è localmente finita. Le proprietà (ii) e (iii) seguono da (ii") e (iii"), trattandosi di condizioni convesse. □

Si osservi che la condizione di Palais-Smale è stata enunciata in modo da aver senso anche per funzioni differenziabili su spazi di Banach. Grazie all'esistenza di un campo pseudo-gradiente per f, concludiamo che il teorema di passo montano 1.3 vale per funzioni di classe C^1 su uno spazio di Banach.

In effetti, la struttura lineare non è rilevante in risultati topologici di questo tipo. Lo spazio di Banach E potrebbe essere sostituito da una varietà di Banach connessa, munita di una struttura Finsleriana, di classe $C^{1,1}$ (si veda [Str00], section II.3).

1.4 Dimostrazione alternativa del Teorema 1.1

Diamo una dimostrazione alternativa del Teorema 1.1, dimostrando direttamente che il funzionale

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx$$

ha un punto critico diverso da 0 in $H^1_0(\Omega)$. Come osservato alla fine della sezione 1.1, il sottolivello $\{f < 0\}$ è sconnesso. Ci basterà quindi dimostrare la validità della condizione di Palais-Smale a livello

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma} f(u),$$

ed applicare il Teorema 1.3 (stiamo usando le notazioni della sezione 1.2). In effetti, dimostreremo che la condizione di Palais-Smale vale a qualsiasi livello.

Dall'espressione (3) per $Df(u)$, ricaviamo l'identità

$$\begin{aligned} pf(u) - Df(u)[u] &= \frac{p}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)\,dx - \int_\Omega |u|^p\,dx - \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)\,dx + \int_\Omega |u|^p\,dx \\ &= \left(\frac{p}{2} - 1\right)\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)\,dx. \end{aligned}$$

Valutando l'identità sopra in u_h, dove (u_h) è una successione di Palais-Smale (di livello qualsiasi) per f, otteniamo

$$O(1) + o(1)\|u_h\| = \left(\frac{p}{2} - 1\right)\int_\Omega (|\nabla u_h|^2 - \lambda u_h^2)\,dx \geq \left(\frac{p}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla u_h|^2\,dx,$$

dove abbiamo usato anche la (6). Dato che $\lambda < \lambda_1$ e la norma L^2 di ∇u è una norma equivalente su $H^1_0(\Omega)$, deduciamo che

$$O(1) + o(1)\|u_h\| \geq \delta\|u_h\|^2$$

per qualche $\delta > 0$, e pertanto la successione (u_h) è limitata.

Osserviamo che il differenziale di f ha la forma

$$Df(u) = Tu + Db(u),$$

dove $T : H^1_0(\Omega) \to (H^1_0(\Omega))^*$ è l'applicazione lineare definita da

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx,$$

cioè l'isomorfismo tra $H^1_0(\Omega)$ e il suo duale determinato dal prodotto scalare L^2 dei gradienti su $H^1_0(\Omega)$, e b è il funzionale

$$b(u) = -\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx.$$

Osserviamo che il funzionale sopra è di classe C^1 anche su $L^p(\Omega)$: quindi $b = \tilde{b} \circ j$, dove $\tilde{b} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ è dato dall'espressione sopra e $j : H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ è l'immersione. Dato che la mappa j è compatta ($p, 2^*$!) e $D\tilde{b}$ è continua, la composizione $Db = D\tilde{b} \circ j$ è una mappa compatta.

Dato che (u_h) è limitata in $H^1_0(\Omega)$, a meno di sottosuccessioni possiamo assumere che $(Db(u_h))$ converga ad un certo ξ in $(H^1_0(\Omega))^*$. Ma allora dal fatto che $(Tu_h + Db(u_h))$ tende a zero segue che (u_h) converge a $T^{-1}\xi$. La condizione di Palais-Smale è dimostrata.

1.6 Esempio. *Dimostrare che se su $H^1_0(\Omega)$ consideriamo il prodotto scalare L^2 dei gradienti, risulta $\nabla f(u) = u + K(u)$, con $K : H^1_0(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ mappa continua e compatta.*

Riferimenti bibliografici

[Bre83] H. Brezis, *Analyse fonctionelle. Théorie et applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.

[Str00] M. Struwe, *Variational methods*, third ed., Springer-Verlag, Berlin, 2000.